Teorija skupova

Matko Males
Split

lipanj 2003.

O pojmu skupa

$A,\ B,\ C,\ldots$ oznake za skupove

$a,\ b,\ c,\ldots$ oznake za elemente skupa

$a \in A$, $a \notin A$

Skup je posve odredjen svojim elementima, tj u potpunosti je zadan ako znamo reci za svaki element da li mu pripada ili ne.

Axiom 1 ***RASPROSTRANJENOSTI (extezionalnosti):*** *Dva su skupa jedanka akko imaju iste elemente.*

Jednakost skupova A i B oznacavamo sa $A = B$.

$A \neq B \implies$ postoji *bar jedan* element koji nije sadzan u oba skupa.

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$; $\{a\} = A$ - *jednoclani skup.*

$S = \{\{1,2,3\}, \{1\}, \{3,4\}\}$, $\{S\} \neq S$, tj: Za svaki skup A vrijedi: $A \neq \{A\}$ & $A \in \{A\}$.

Izjavnu funkciju oznacavamo sa $P(x)$, a " $x^2 < 10$" i "x je paran broj" su primjeri izjavnih funkcija.

Kada u izjavnu funkciju uvrstimo varijablu iz *podrucja definicije (predmetni skup)*, tada izjavna funkcija postaje *sud*, koji moze biti istinit ili lazan: Npr. uvrstimo li varijablu $x = 3$ u prvu izjavnu funkciju dobijemo $9 < 10 \implies P(3)$ je istinit sud, dok uvrstimo li varijablu $x = 4 \implies 16 < 10 \implies P(4)$ je lazan sud.

Kaze se da varijabla a iz podrucja definicije *zadovoljava izjavnu funkciju* $P(x)$ ako je $P(a)$ istinit sud.

Ako u izjavnoj funkciji izostavimo varijablu, onda se preostali dio naziva *predikat* .

Neka je A podrucje definicije izjavne funkcije $P(x)$. Simbolom $\{x \in A \mid P(x)\}$ oznacavat cemo skup svih onih elemenata iz skupa A, tj predmetnih varijabli koje zadovoljavaju izjavnu funkciju $P(x)$, tj za koje je tako dobiven sud istinit. Dakle: $a \in \{x \in A \mid P(x)\} \iff P(a)$. (tj ako je $P(a)$ istinit sud). Npr: neka je $P(x) : x^2 - 1 = 0$, tada je skup $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{1, -1\}$, dakle $P(1)$ & $P(-1)$ su istiniti sudovi.

Neka je A proizvoljni skup, a $P(x)$: "$x \neq x$". Skup $\{x \in A \mid P(x)\}$ je skup bez elemenata, jer je za svaki $x \in A$, $x = x$.

Axiom 2 ***O POSTOJANJU PRAZNOG SKUPA:*** *Postoji skup koji nema nijednog elementa tj.* $(\exists S)(\forall x)(x \notin S)$ *.(Takav skup zvat cemo* prazan skup, *ozn:* $\emptyset$*)*

Iz egzistencije praznog skupa slijedi da postoji skup ciji je element prazan skup: $\{\emptyset\}$.Pri tom je naravno: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Example 1 *Neka je* $P(x) : x^2 + 1 = 0$. *Tada je* $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\} = \emptyset$.

- Postoji tocno jedan jedinstveni prazan skup. Dokazimo to: Neka su $\emptyset_1$ i $\emptyset_2$ dva prazna skupa i neka je $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. Prema aksiomu rasprostranjenosti

(1) proizlazi da barem jedan od njih ima element koji nije element drugog, no to bi znacilo da prazan skup ima element sto je u suprotnosti s gornjim aksiomom.

Axiom 3 ***PARA:*** *Ako su A i B skupovi, postoji skup kojem su jedini elementi A i B, tj.postoji skup $\{A, B\}$.*

$\{A, B\}$ se zove (neuredjeni) *par* skupova A i B i pri tom je $\{A, B\} = \{B, A\}$. No ako je $A = B$ onda je $\{A, B\} = \{A, A\} = \{A\}$.

Pogledajmo sada izjavnu funkciju $P(x) : x$ *je prirodan broj manji od* 3.Tada je $\{x \in \mathbb{N} \mid P(x)\} = \{1, 2\}$. U ovom primjeru smo polazeci od jednog skupa ($\mathbb{N}$) pomocu odredjenog svojstva (biti manji od 3) izdvojili jedan njegov dio i tako smo pomocu $P(x)$ nacinili novi skup. Prirodno je stoga prihvatiti sljedeci aksiom:

Axiom 4 ***IZBORA PODSKUPOVA (specifikacije):*** *Neka je A zadani skup a $P(x)$ neka je izjavna funkcija takva da $\forall x \in A$, $P(x)$ ima smisla (tj. $P(x)$ je istinit ili lazan sud). Tada postoji skup B kojem su elementi oni i samo oni $x \in A$ za koje je $P(x)$ istinit sud, tj $B = \{x \in A \mid P(x)\}$.*

Proturjecja u Cantorovoj teoriji vidi knjigu str 10.- "skup skupova" - klasa...

Definition 1 *Neka su A i B skupovi. Kazemo da je A* sadrzan u *B (ili da je A* podskup skupa *B) i pisemo $A \subseteq B$* ako je svaki element od *A* ujedno i element od *B, tj.*

$$x \in A \ \& \ x \in B \implies A \subseteq B? \tag{1}$$

Uvijek je dakle $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$[1]*, $\forall A$, a ako je $A \subseteq B$ & $A \neq B$ kaze se da je A* pravi podskup skupa *B i pise se $A \subset B$.*

Definition 2 *Relacija sadrzavanja "$\subseteq$" ima sljedeca svojstva:*

1) $A \subseteq A$ (refleksivnost)
2) $A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A \implies A = B$ (antisimetrija)
3) $A \subseteq B \ \& \ B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (tranzitivnost)

Iz gore navedenoga slijedi da ako je $a \in A \implies \{a\} \subseteq A$

Axiom 5 ***PARTITIVNOG SKUPA:*** *Za svaki skup A postoji* partitivni skup *$F(A)$ kojem su elementi svi podskupovi skupa A.*

Axiom 6 ***UNIJE:*** *Oznacimo sa L neki skup skupova. Za svaki L postoji skup S koji se sastoji od onih i samo od onih elemenata koji su elementi u barem jednom skupu skupa L tj. $x \in S \iff \exists X (x \in X \ \& \ X \in L)$*

[1] $\forall A$ je dakle $\emptyset \subseteq A$. Kad to ne bi bilo tocno, morao bi prema **??** postojati barem jedan element skupa $\emptyset$ koji nije element od A, no kako prazan skup nema elemenata to nije moguce.

Skup S se naziva *unija skupa* L i pise $S = \cup L = \cup\{X \mid X \in L\} = \underset{X\in L}{\cup} X$.

Iz aksioma rasprostranjenosti (1) proizlazi da je unija jedinstveno odredjen skup.

Neka su A i B skupovi. Tada je $L = \{A, B\} \neq \cup L = A \cup B$, a ako je $L = \{A\}$ onda je $\cup L = A$, i jos je $\cup\emptyset = \emptyset$.

Theorem 1 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $X_1, \dots, X_n$ skupovi. Tada postoji skup $\{X_1, \dots, X_n\}$.*

Proof. Neka je $n \in \mathbb{N}$ & $X_1, \dots, X_n$ skupovi. Prema aksiomu para (3) postoji skup $\{X_1, X_2\}$. Primjenom aksioma unije (6) na skup $L = \{\{X_1, X_2\}, \{X_3\}\}$ postoji skup $\cup L = \{X_1, X_2\} \cup \{X_3\} = \{X_1, X_2, X_3\}$. Postupak mozemo nastaviti dalje primjenjujuci aksiom unije sada na skup $L = \{\{X_1, X_2, X_3\}, \{X_4\}\}$. U konacno koraka dobijemo skup $\{X_1, \dots, X_{n-1}\} \cup \{X_n\} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ■

Definition 3 *Neka je L neki skup skupova.* Presjek skupa L *je skup P koji se sastoji od onih i samo onih elemenata koji su elementi u svakom skupu iz L tj. $P = \{x \mid x \in X \ , \forall X \in L\}$.*

$P = \cap L = \cap\{X \mid X \in L\} = \underset{X\in L}{\cap} X$, i vrijedi $\cap\{A\} = A$.

Za razliku od unije koja je definirana aksiomatski, cinjenica da je P **skup** proizlazi iz vec navedenih aksioma. Naime egzistencija skupa P proizlazi iz aksioma specifikacije (4) jer je P sadrzan u svakom elementu $X \in L$ kao podskup, a jedinstvenost skupa P slijedi iz aksioma rasprostranjenosti (1).

Definition 4 *Neka su A i B skupovi. Skup $A \backslash B$ je skup koga tvore svi oni elementi skupa A koji nisu elementi skupa B.Skup $A \backslash B$ zovemo* relativni komplement od B u odnosu na A, *odnosno* razlika skupova A *i* B. $A \backslash B = \complement_A B$.

Ako su svi skupovi koje promatramo podskupovi nekog skupa U kojeg onda nazivamo univerzum ili *univerzalni skup*, koristimo oznaku $\complement_U B = B^{\complement} = U \backslash B$.

Vazno je napomenuti da ne postoji skup A koji bi bio apsolutni komplement skupa B tj. $A = \{x \mid x \notin B\}$. Naime kada bi takav skup postojao onda po aksiomu unije (6) je $A \cup B$ skup. No tada bi $A \cup B$ sadrzavao sve skupove, a znamo da svi skupovi tvore *klasu* koja nije skup.

Definition 5 *Neka je T zadani skup. Skup $T^+ = T \cup \{T\}$ naziva se* sljedbenik skupa T.

Na taj nacin mozemo dalje definirati sljedbenika skupa $T^+ : (T^+)^+ = T^{++}$ itd. No odavde jos ne slijedi da se ova konstrukcija moze nastaviti u beskonacnost, jer dosad uvedeni aksiomi ne osiguravaju postojanje beskonacnih skupova. Zato je potreban:

Axiom 7 ***BESKONACNOSTI:****Postoji skup A koji sadrzi prazan skup i sadrzi sljedbenika svakog svog elementa.*

Definition 6 *Kazemo da je skup A* induktivan *ako sadrzi* <u>*prazan skup*</u> *i* <u>*sljedbenika svakog svog eleme*</u>

Sada bi aksiom beskonacnosti mogli izreci i ovako: Postoji induktivan skup.

Theorem 2 *Neka je L neprazni skup induktivnih skupova. Tada je presjek od L takodjer induktivan skup.*

Proof. Prema gornjoj definiciji trebamo pokazati da je $\emptyset \in \cap L \;\; \& \;\; (\forall Y \in \cap L \implies Y^+ \in \cap L)$.
Kako je po definiciji praznog skupa $\emptyset \in X$, $\forall X \in L$ to je prema def 3 $\emptyset \in \cap L$.
Neka je $Y \in \cap L$. To znaci da je $Y \in X$, $\forall X \in L$. Kako je svaki $X \in L$ induktivan skup to je i $Y^+ \in X$, $\forall X \in L$. No onda je po definiciji presjeka (3) $Y^+ \in \cap L$.Dakle $\cap L$ je induktivan skup. ■

Theorem 3 *Postoji najmanji induktivni skup.*

Proof. Neka je A proizvoljni induktivni skup.(Postoji takav barem jedan prema aksiomu beskonacnosti). Oznacimo s ω skup koji trazimo i neka je on presjek svih induktivnih skupova koji su podskup od A. Dokazimo sad da upravo takav ω je trazeni najmanji induktivni skup:
Najprije ω je prema teoremu **??** induktivan.
Treba jos pokazati da je najmanji takav, tj da je sadrzan u svakom induktivnom skupu, odnosno da za proizvoljni induktivni skup B vrijedi: $\omega \subseteq B$. Kako je $A \cap B$ takodjer induktivan (prema istom teoremu), te kako je $A \cap B \subseteq A$ (slijedi iz definicije presjeka) to je $\omega \subseteq A \cap B$ (jer je ω u presjeku svih induktivnih podskupova od A, tj sadrzan je u svakom od njih, pa tako i u $A \cap B \subseteq A$). No onda iz definicije presjeka slijedi da je $\omega \subseteq B$, sto smo i trebali pokazati. ■

- ω je jedinstven (slijedi iz aksioma rasprostranjenosti (1)).

Napisat cemo sad nekoliko elemenata iz ω koristeci definiciju 5 :
$\emptyset \overset{ozn.}{=} 0$
$0^+ = \emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} =$ [2] $\{\emptyset\} \overset{ozn.}{=} 1 = 0^+$
$1^+ = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \overset{ozn.}{=} 2 = 1^+$
$2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} \overset{ozn.}{=} 3 = 2^+$
... itd.
Skup ω nazivamo *prosireni skup prirodnih brojeva.*

Remark 1 $\mathbb{N} = \omega \backslash \{0\}$ *nazivamo skup prirodnih brojeva. Prirodne brojeve smo dakle pomalo neobicno definirali kao skupove ... tako je broj 1 element broja 2 tj njegov podskup kao i svakog drugog veceg prir. broja itd. Dobitak ovakvog definiranja je u tom sto nismo morali uvoditi nove aksiome.*

Slijedi vazno svojstvo skupa ω koje je posljedica cinjenice da je to najmanji induktivni skup:

Theorem 4 ***PRINCIP MATEMATICKE INDUKCIJE:*** *Neka je $S \subseteq \omega$ takav da je $0 \in S$ i da iz $n \in S \implies n^+ \in S$. Tada je $S = \omega$.*

[2] jer prema aksiomu unije (**??**) vrijedi $\emptyset \cap A = A$.

Proof. Trebamo dokazati jednakost dvaju skupova . To cemo uciniti pomazuci se definicijom 2 tj antisimetricnoscu relacije " $\subseteq$ ".Treba dakle pokazati da je $S \subseteq \omega \;\&\; \omega \subseteq S$.
(i) Pema uvjetu teorema je vec ispunjeno $S \subseteq \omega$.
(ii) Isto tako je zbog ostalih uvjeta teorema prema definiciji induktivnog skupa (6) skup S induktivan. No prema teoremu 3 vrijedi $\omega \subseteq S$.
(i) & (ii) $\Longrightarrow \omega = S$. ■

Remark 2 *Princip matematicke indukcije je istinit i za skup* $\mathbb{N}$, *pri cemu ulogu* 0 *preuzima* 1.

Definition 7 *Za skup A kazemo da je* tranzitivan *ako je svaki element elementa skupa A i sam element skupa A, tj.*

$$x \in a \;\&\; a \in A \Longrightarrow x \in A. \tag{2}$$

Prethodna definicija moze se **ekvivalentno** izreci i ovako:

Definition 8 *Skup A je* tranzitivan *ako je svaki element skupa A ujedno i podskup skupa A, tj.*

$$a \in A \Longrightarrow a \subseteq A \tag{3}$$

Pokazimo (2) $\Longleftrightarrow$ (3) :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka vrijedi (2). Neka je $a \in A$.Treba pokazati da je onda $a \subseteq A$ tj.(prema def 1) da svaki element od a je ujedno element od A. Uzmimo onda proizvoljni $x \in a$.Tada ce zbog (2) vrijediti $x \in A$, pa je prema istoj definiciji $a \subseteq A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka vrijedi (3). Neka je $x \in a \;\&\; a \in A$. Treba dokazati da je $x \in A$. Posto je $a \in A$, to je takodjer prema (3) i $a \subseteq A$. No iz $a \subseteq A$ slijedi (prema relaciji (1)) da ako je $x \in a$ onda je $x \in A$.

Theorem 5 *Skup A je tranzitivan* **akko** *je* $\cup A \subseteq A$.

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je skup A tranzitivan. Treba pokazati da je $\cup A \subseteq A$, tj. $x \in \cup A \Longrightarrow x \in A$. Odaberimo proizvoljni $x \in \cup A$.Ako je $x \in \cup A$ to znaci da $\exists a \in A$ takav da je $x \in a$. Posto je A tranzitivan to zbog relacije (2) slijedi $x \in A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $\cup A \subseteq A$. Treba pokazati da je A tranzitivan, tj da $x \in a \;\&\; a \in A \Longrightarrow x \in A$. Neka je dakle $x \in a \;\&\; a \in A$. To znaci da je $x \in \cup A$. No zbog pretpostavke $\cup A \subseteq A$ i definicije podskupa 1 vrijedi $x \in A$.

■

Theorem 6 *Neka je A tranzitivan skup. Tada je $\cup A^{+} = {}^{3}A$.*

Proof. $\cup A^{+} = \cup(A \cup \{A\}) =^{4} (\cup A) \cup \underbrace{(\cup\{A\})}_{=A} = (\cup A) \cup A$. Posto je A tranzitivan to je prema teoremu 5 $\cup A \subseteq A$, pa je $(\cup A) \cup A$ zapravo unija skupa A i njegovog podskupa a to je $= A$. ■

Theorem 7 *Svaki element skupa ω, tj. svaki prirodan broj ukljucujuci i nulu, je tranzitivan skup.*

Proof. Dokaz provodimo koristeci princip matematicke indukcije (teorem 4).
Neka je $S \subseteq \omega$ skup svih elemenata iz ω koji su tranzitivni skupovi.
Ocito je $0 \in S$[5].
Neka je $n \in S$. Prema tm. 4 trebamo pokazati da je onda i $n^{+} \in S$, tj da je n^{+} tranzitivan skup. Iskoristit cemo def. 8. Neka je dakle $x \in n^{+} = n \cup \{n\}$. Tada je $x \in n$ ili $x \in \{n\}$ (tj $x = n$).
Ako je $x \in n$, a $n \in S$ (tj. n je tranzitivan), to prema def. 8 slijedi da je $x \subseteq n$, a pogotovo je onda $x \subseteq n \cup \{n\} = n^{+}$. Imamo dakle $x \in n^{+} \implies x \subseteq n^{+}$ pa je prema def.8 n^{+} tranzitivan skup.
Ako je $x = n$ onda je $x \subseteq n \cup \{n\} = n^{+}$, pa je takodjer prema def. 8 n^{+} tranzitivan skup.
Imamo dakle $0 \in S$, $n \in S \implies n^{+} \in S$, pa je prema tm. 4 $S = \omega$. ■

Theorem 8 *ω je tranzitivan skup.*

Proof. Dovoljno je prema def.8 pokazati da $n \in \omega \implies n \subseteq \omega$ i to $\forall n$.
Neka je S skup svih $n \in \omega$ za koje vrijedi $n \subseteq \omega$.
Ocito je $0 \in S$, jer je $0 \in \omega$ ali je i $0 \subseteq \omega$.

Neka je $n \in S$. Pokazemo li da onda slijedi da je i $n^{+} \in S$, tada cemo prema principu matematicke indukcije (tm.4) imati $S = \omega$, cime ce tvrdnja teorema biti dokazana. Posto je $n \in S$ to znaci da je $n \in \omega$ & $\underline{n \subseteq \omega}$.No ako je $n \in \omega$ to je onda i $\underline{\{n\} \subseteq \omega}$[6]. Iz potcrtanog slijedi $n \cup \{n\} = \overline{n^{+} \subseteq \omega}$ (prema def.1). A jer je ω induktivan skup (def.6) vrijedi i $n^{+} \in \omega$. Imamo dakle $n^{+} \in \omega$ i $n \subseteq \omega$ dakle $n^{+} \in S$.
Dakle $S = \omega$. ■

Corollary 9 *Svaki prirodan broj je skup nekih prirodnih brojeva.*

Proof. Neka je $n \in \omega$. Promatrajmo proizvoljni $x \in n$. Pa jer je ω tranzitivan skup imamo $x \in n$ & $n \in \omega \implies$ prema def 7 $\implies x \in \omega$ tj. $x \in n$ je prirodan broj. ■

---

[3] Neka je npr. $A = 3 = \{0, 1, 2, \}$(vidi napomenu **??** i izgradnju prirodnih brojeva). Onda je $A^{+} = 4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{0, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\} \implies \cup A^{+} = \{0, 1, 2, \} = A$

[4] Neka su A i B neki skupovi skupova.Vrijedi: $\cup(A \cup B) = (\cup A) \cup (\cup B)$.
[$A \cup B$ je skup kojem su elementi oni i samo oni skupovi koji su elementi skupa A ili elementi skupa B.Neka je $x \in \cup(A \cup B)$ tj. x je element nekog elementa skupa A ili nekog elementa skupa B. No to znaci da je $x \in \cup A$ ili je $x \in \cup B$, tj. $x \in (\cup A) \cup (\cup B)$. Vrijedi i obrat.]

[5] Primjenom teorema **??** na skup $\emptyset = 0$.

[6] Npr. za $n = 4 \in \omega$ je $\{4\} \subseteq \omega$.

Remark 3 *Na skupu* ω *moze se definirati* uredjaj *na sljedeci nacin:* $m < n \iff m \in n$.

Theorem 10 *Skup* ω *ima sljedeca svojstva:*
(i) $0 \in \omega$
(ii) Ako je $n \in \omega$ *onda je* $n^+ \in \omega$
(iii) Ne postoji niti jedan $x \in \omega$ *takav da je* $x^+ = 0$
(iv) Ako je $S \subseteq \omega$ *takav da je* $0 \in S$ *i da iz* $n \in S \implies n^+ \in S$*, onda je* $S = \omega$.
(v) Ako su $m, n \in \omega$ *takvi da je* $m^+ = n^+$*, onda je* $m = n$.

Proof.
(i) i (ii) su posljedica cinjenice da je ω induktivan skup (def.6).
(iii) je posljedica cinjenice da je $\forall x \in \omega,\ x^+ = x \cup \{x\} \neq \emptyset$, pa je $x^+ \neq 0$.
(iv) je princip matematicke indukcije
(v) Neka su $m, n \in \omega$ takvi da je $m^+ = n^+$. No onda je i $\cup (m^+) = \cup (n^+)$. Kako je svaki element od ω tranzitivan skup (tm.7) to su m, n tranzitivni skupovi. Prema tm.6 je onda $\cup m^+ = m$ i $\cup n^+ = n$. Dakle $m = n$. ■

Remark 4 *1889. g.* Peano *je uveo skup prirodnih brojeva aksiomatski. Aksiomi (i)-(v) iz prethodnog teorema nazivaju se* Peanovi aksiomi *i iz njih se izvode sva poznata svojstva prirodnih brojeva.*

Aksiom beskonacnosti (7)ne daje mogucnost izgradnje dovoljno velikih skupova. Zato 1922. *Fraenkel* uvodi novi aksiom u *Zermelovu* aksiomatiku:

Axiom 8 ***SUPSTITUCIJE:*** *Neka je* A *zadani skup, a* $P(x, y)$ *izjavna funkcija dviju varijabli takva da* $\forall a \in A$ *postoji jedinstveni skup* b *takav da je* $P(a, b)$ *(istinito). Tada postoji jedinstveni skup* B *kojem su elementi svi skupovi* y *za koje postoji element* $x \in A$ *takva da je* $P(x, y)$ *(istinito)*

Ovaj aksiom ima i "naivno" tumacenje:
Ako je na skupu A definirana funkcija f i za svaki element $a \in A$ je $f(a)$ skup, onda je $B = \{f(a) \mid a \in A\}$ takodjer skup.

Example 2 *Neka je* $A = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$.
Prema Aksiomu partitivnog skupa (5) mozemo postupno izgraditi nove skupove: $F(\mathbb{N}) = A_1,\ F(A_1) = A_2, \ldots, F(A_{n-1}) = A_n$.
Iz aksioma supstitucije slijedi da postoji skup: $L = \{A_1, \ldots A_n, \ldots\}$*(a to ne slijedi iz dosadasnjih aksioma)*[7].
Aksiom unije (6) omogucuje i izgradnju skupa $\cup L = \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

[7] $\neq$ tm. **??** gdje se tvrdi da postoji **konacan** skup. Ovdje je taj skup "beskonacan" ali po aksiomu supstitucije znamo da je *skup*.

Kartezijev produkt. Relacije. Funkcije

Definition 9 *Skup* $\{\{x\},\{x,y\}\}$ *naziva se* uredjeni par s prvim elementom x i drugim elementom y *i oznacava* (x,y) .

$(x,y) \neq (y,x) = \{\{y\},\{x,y\}\}$

Proposition 11 *Uredjeni par* (x,y) *jednak je uredjenm paru* (u,v) ***akko*** *je* $x = u$ *i* $y = v$.

Neka su X i Y skupovi te $x \in X$ i $y \in Y$. No onda je $x, y \in X \cup Y$, i $X \cup Y$ je skup prema aksiomu unije 6. No onda je $\{x\},\{x,y\} \in F(X \cup Y)$ i $F(X \cup Y)$ je skup prema aksiomu partitivnog skupa 5 . No onda je i $\{\{x\},\{x,y\}\} \in F(F(X \cup Y))$ a to je opet skup. Dakle $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \in F(F(X \cup Y))$.

Sada primjenom aksioma specifikacije 4 izlazi da postoji skup

$$X \times Y = \{z \in F(F(X \cup Y)) \mid (\exists x \in X)(\exists y \in y),\ z = (x,y)\} \tag{4}$$

$X \times Y$ se naziva *direktni produkt* ili *Kartezijev produkt skupova* X i Y.

Definition 10 *Neka su* X *i* Y *skupovi.* Dvoclana (binarna) relacija iz skupa X u skup Y *je svaki podskup* $R \subseteq X \times Y$.

Ako je $Y = X$ i $R \subseteq X \times X$ kazemo da je R relacija na skkupu X.
Neka je $R \subseteq X \times Y$:

- Skup $D_1(R) = \{x \in X \mid \exists y \in Y,\ (x,y) \in R\}$ nazivamo *domena* ili *lijevo podrucje relacije* R.
- Skup $D_2(R) = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ (x,y) \in R\}$ nazivamo *kodomena* ili *desno podrucje relacije* R.

$(x,y) \in R$ uobicajeno pisemo xRy .

Definition 11 *Neka su* X, Y, Z *skupovi,* $R \subseteq X \times Y$ *relacija iz* X *u* Y , $S \subseteq Y \times Z$ *relacija iz* Y *u* Z. *Pod* kompozicijom relacija R i S *podrazumijevamo relaciju:*

$$S \circ R = \{(x,z) \mid \exists y \in Y,\ (x,y) \in R\ \&\ (y,z) \in S\} \subseteq X \times Z \tag{5}$$

Uocimo sljedece:
$D_1(S \circ R) = D_1(R)$
$D_2(S \circ R) = D_2(S)$
$D_2(R) = D_1(S)$

Definition 12 *Neka je* $R \subseteq X \times Y$. Inverzna relacija relaciji R *je relacija*

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\} \subseteq Y \times X \tag{6}$$

Proposition 12 *Neka je $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times W$. Tada vrijedi:*
(i) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
(ii) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Summary 1 *Vrijedi sljedece:*
$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
$\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$
$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$
$(R \cap S) \circ T = (R \circ T) \cap (S \circ T)$
$(X \times Y)^{-1} = Y \times X$

Definition 13 *Za relaciju $R \subseteq X \times X$ kazemo da je:*
1) refleksivna *ako je* $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq R$
2) antirefleksivna *ako je* $\Delta \cap R = \emptyset$, *(tj. ako* $\neg(xRx), \forall x \in X$*)*
3) simetricna *ako je* $R^{-1} = R$, *(tj. ako* $xRy \implies yRx$*)*
4) antisimetricna *ako je* $R \cap R^{-1} = \Delta$, *(tj. ako* $xRy \ \& \ yRx \implies x = y$*)*
5) tranzitivna *ako je* $R \circ R \subseteq R$, *(tj. ako* $xRy \ \& \ yRz \implies xRz$*)*
6) asimetricna *ako je* $R \cap R^{-1} = \emptyset$, *(tj. ako* $xRy \implies \neg(yRx)$*)*
7) povezana *ako je* $((X \times X) \setminus \Delta) \cap R \neq \emptyset$, *(tj. ako* $x \neq y \implies xRy$ *ili* yRx*)*

Definition 14 Funkcija (preslikavanje) f definirana na skupu X s vrijednostima u skupu Y *je relacija* $f \subseteq X \times Y$ *tako da vrijedi:*
(i) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)$, $(x,y) \in f$
(ii) *Ako je* $(x,y_1) \in f$ *i* $(x,y_2) \in f$ *onda je* $y_1 = y_2$
krace: $(\forall x \in X)(\forall y_1 \in Y)(\forall y_2 \in Y)((x,y_1) \in f \ \& \ (x,y_2) \in f \implies y_1 = y_2)$

$D_1(f) = X$ - zovemo domena
$D_2(f) = Y$ - zovemo kodomena ili skup funkcijskih vrijednosti
Umjesto $(x,y) \in f$ *(ili* xfy) pise se $y = f(x)$, a f oznacavamo $f : X \longrightarrow Y$.
Neka su X i Y (neprazni) skupovi. Oznacimo sa $y^X = \{f \mid f : X \longrightarrow Y\}$. Po definiciji funkcije vrijedi $f \subseteq X \times Y$ tj. $f \in F(X \times Y)$ pa je $Y^X \subseteq F(X \times Y)$, pa je po aksiomu specifikacije (4) Y^X skup.

Definition 15 *Za funkciju $f : X \longrightarrow Y$ kazemo da je*
(i) injekcija[8] *ako*

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(\forall y \in Y)((x_1,y) \in f \ \& \ (x_2,y) \in f \implies x_1 = x_2) \quad (7)$$

(ii) surjekcija *ako*

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X), (x,y) \in f \ ; \ (D_2(f) = Y) \quad (8)$$

(iii) bijekcija *ako*

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(\forall x' \in X)((x,y) = (x',y) \in f \implies x = x') \quad (9)$$

[8] f je injekcija ako za $x_1, x_2 \in X$ vrijedi:*(i)* $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$; ili *(ii)* $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Example 3 - identiteta: $1_X = id_X : X \longrightarrow X$, $id_X(x) = x$, $(\forall x \in X)$ *je bijekcija.*
- inkluzija: *ako je* $X \subseteq Y$, $i : X \longrightarrow Y$ $(\forall x \in X)$ $i(x) = x$ *je injekcija ali ne i surjekcija.*

- Ako su $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ funkcije, onda je $g \circ f \subseteq X \times Z$ funkcija koju nazivamo *kompozicija funkcija* f i g (vidi def.11). Pokazimo (prema def14) da je to zaista funkcija:
  Najprije prema def11 odredimo skup $g \circ f$:
  $g \circ f = \{(x,z) \mid \exists y \in Y,\ (x,y) \in f\ \&\ (y,z) \in g\} =$
  $= \{(x,z) \mid \exists y \in Y,\ y = f(x)\ \&\ z = g(y)\} =$
  $= \{(x,z) \mid z = g(f(x))\} =$
  $= \{(x,z) \mid z = (g \circ f)(x)\}$
  Nadalje pokazimo da vrijede (i) i (ii) iz def.14:
  (i): tj. pokazimo da $(\forall x \in X)\underline{(\exists z \in Z)}$ $(x,z) \in g \circ f$, tj.da je $z = (g \circ f)(x)$. Naime jer je f funkcija to $(\forall x \in X)(\exists y \in Y), (x,y) \in f$, tj da je $y = f(x)$, pa je onda $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) \in Z$, pa je dakle $g(y) = z$ takav da je $(x,z) \in g \circ f$.
  (ii): tj pokazimo da $(x,z_1) \in g \circ f\ \&\ (x,z_2) \in g \circ f \implies z_1 = z_2$.Naime $z_1 = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, a $z_2 = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.No kako je $f(x) = y$ to imamo da je $(y,z_1) \in g\ \&\ (y,z_2) \in g$ pa je zbog svojstva (ii) iz def.14 za funkciju $g \implies z_1 = z_2$.

- Kompozicija funkcija ima sljedeca svojstva:
  (i) Kompozicija je *asocijativna* (zbog propoz. 12).
  (ii) $id \circ f = f$ i $f \circ id = f$ (kad god su kompozicije definirane)

Definition 16 *Neka je* $f \in Y^X$. *Kazemo da je:*
(i) f monomorfizam *ako* $(\forall g_1 \in X^Z)(\forall g_2 \in X^Z)(fg_1 = fg_2 \implies g_1 = g_2)$
(ii) f epimorfizam *ako* $(\forall g_1 \in Z^Y)(\forall g_2 \in Z^Y)(g_1 f = g_2 f \implies g_1 = g_2)$
(iii) f bimorfizam *ako je monomorfizam i epimorfizam*
(iv) f izomorfizam *ako* $(\exists g \in X^Y)$ *takav da je* $g \circ f = id_X$ *i* $f \circ g = id_Y$.

Theorem 13 *Neka je* $f \in Y^X$. *Tada vrijedi:*
(i) f *je monomorfizam* ***akko*** *je* f *injekcija*
(ii) f *je epimorfizam* ***akko*** *je* f *surjekcija*
(iii) f *je bimorfizam* ***akko*** *je* f *bijekcija*
(iv) f *je izomorfizam* ***akko*** *je* f *bijekcija*

Proof.

(i) $\boxed{\implies}$ Neka je f monomorfizam. Dokazimo da je f injekcija, tj da $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Pretpostavimo suprotno tj da je $x_1 \neq x_2$ i $f(x_1) = f(x_2)$. Neka je skup $Z = \{0\}$ jednoclan skup. Definirajmo funkcije $g_1 : Z \longrightarrow X$ i $g_2 : Z \longrightarrow X$, tako da je $g_1(0) = x_1$ i $g_2(0) = x_2$. Promotrimo kompozicije $f \circ g_1$, $f \circ g_2 : Z \longrightarrow Y$ .Imamo $fg_1(0) = f(g_1(0)) = f(x_1) =$ po pretpostavci $= f(x_2) = f(g_2(0)) = fg_2(0)$.

Imamo dakle $fg_1 = fg_2$, no jer je f monomorfizam slijedi $g_1 = g_2$, tj $g_1(0) = x_1 = g_2(0) = x_2$ sto je kontradikcija s Pp da je $x_1 \neq x_2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je f injekcija. Treba dokazati da je f monomorfizam. Neka su $g_1, g_2 \in X^Z$ i $fg_1 = fg_2$. Treba dokazati $g_1 = g_2$. Kako je $fg_1 = fg_2$ to znaci da $\forall z \in Z$ vrijedi $(fg_1)(z) = (fg_2)(z)$ tj $f(g_1(z)) = f(g_2(z))$. Kako je f injekcija slijedi $g_1(z) = g_2(z)$ $\forall z \in Z$ pa je $g_1 = g_2$.

(ii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je f epimorfizam. Dokazimo da je f surjekcija. Pretpostavimo suprotno tj da $\exists y_0 \in Y$ takav da $\forall x \in X$ je $f(x) \neq y_0$. Neka je $Z = \{0,1\}$ i $g_1 : Y \longrightarrow Z$, $g_1(y) = 0$ $\forall y \in Y$, a $g_2 : Y \longrightarrow Z$ neka je funkcija definirana sa: $g_2(y) = \{ {}^{0,\ y \neq y_0}_{1,\ y = y_0}$. Ocito je $g_1 \neq g_2$. No vrijedi $\forall x \in X$: $(g_1 f)(x) = g_1(f(x)) = 0$ ali i $(g_2 f)(x) = g_2 \underbrace{(f(x))}_{\neq y_0} = 0$, tj vrijedi: $g_1 f = g_2 f$. Kako je f epimorfizam odatle slijedi $g_1 = g_2$, sto je kontradikcija s definicijom funkcija g_1 i g_2.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je f surjekcija. Treba dokazati da je f epimorfizam. Neka su $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$, i neka je $g_1 f = g_2 f$. Treba pokazati da je onda $g_1 = g_2$. Kako je $g_1 f = g_2 f$ to je $(g_1 f)(x) = (g_2 f)(x) = \underline{g_1(f(x)) = g_2(f(x))\ (\forall x \in X)}$. Kako je f surjekcija to $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Imamo dakle da $\underline{\forall f(x) = y \in Y}$ je $g_1(y) = g_2(y) \implies g_1 = g_2$.

(iii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je f bimorfizam. .Treba pokazati da je f bijekcija. Kako je f bimorfizam to je zbog def16 f monomorfizam i epimorfizam. No jer je dakle f monomorfizam to je zbog dokazane tvrdnje (i) iz teorema f i injekcija, a zbog tvrdnje (ii) f je i surejkcija, dakle f je bijekcija.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je f bijekcija. Treba pokazati da je f bimorfizam tj (prema def16) da je f monomorfizam i epimorfizam. Kako je f bijekcija, to je f i injekcija i surjekcija. no zbog tvrdnji (i) i (ii) iz teorema to znaci da je f monomorfizam i epimorfizam, tj f je bimorfizam.

(iv) $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $f \in Y^X$izomorfizam. treba dokazati da je f bijekcija, tj da je f injekcija i f surjekcija.
Kako je f izomorfizam to (prema def16) znaci da $\exists g \in X^Y$ takva da je $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$.
Dokazimo da je f injekcija. Neka su x_1 i $x_2 \in X$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Treba pokazati da je tada $x_1 = x_2$. Kako je f izomorfizam to $\exists g \in X^Y$ t.da je $(g \circ f)(x_1) = id_X(x_1) = x_1 = g(f(x_1)) =$ [zbog $f(x_1) = f(x_2)$] $= g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) =$ jer je f izo$= id_X(x_2) = x_2$. Dakle $x_1 = x_2$, tj f je injekcija.
Dokazimo sad da je f surjekcija. Trebamo dokazati da $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$, t.da je $f(x) = y$. Odaberimo proizvoljni $y \in Y$. Kako je f izomorfizam to $\exists g \in X^Y$ takav da je $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = id_Y(y) = y$. Kako je $g(y) \in X$ to smo upravo pronasli $x = g(y)$ takav da je $f(x) = y$. posto je nas y bio proizvoljan, to takav x postoji $\forall y \in Y$ pa je f surjekcija.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je f bijekcija. Treba pokazati da je f izomorfizam tj. (prema def16) da $\exists g \in X^Y$ takva da je $g \circ f = id_X$ i $f \circ g = id_Y$.,treba dakle pronaci takvu funkciju g. Kako zelimo da $(g \circ f)(x) = g\underbrace{(f(x))}_{\in Y}$ bude $= x$, definirajmo $g \in X^Y$ na sljedeci nacin: za proizvoljni $y \in Y$ stavimo $f(x) = y \iff g(y) = x$, tj $g = f^{-1}$ je inverzna relacija od f (i ona je funkcija sto slijedi iz cinjenice da je f bijekcija). Kako je po samoj definiciji od g osigurano $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = id_X$, $\forall x \in X$, te $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y = id_Y, \forall y \in Y$ to je $gf = id_X$ i $fg = id_Y$,dakle f je izomorfizam.

■

Remark 5 *(i) Kompozicija monomorfizama je monomorfizam*
(ii) Kompozicija epimorfizama je epimorfizam
(iii) Kompozicija bimorfizama je bimorfizam
(iv) Kompozicija izomorfizama je izomorfizam.

Theorem 14 *Neka je $f \in Y^X$ i $g \in Z^Y$.*
(i) Ako je $g \circ f$ monomorfizam onda je f monomorfizam
(ii) Ako je $g \circ f$ epimorfizam onda je g epimorfizam.

Proof.
(i) Neka je gf monomorfizam. Dokazimo da je onda f monomorfizam. Prema def16 treba pokazati da $\forall g_1, g_2 \in X^Z$, $fg_1 = fg_2 \implies g_1 = g_2$. Neka je $fg_1 = fg_2$, tada je $g(fg_1) = g(fg_2)$. Zbog asocijativnosti kompozicije (propoz.12) je onda $(gf)g_1 = (gf)g_2$. Kako je gf monomorfizam slijedi $g_1 = g_2$, tj f je monomorfizam.
(ii)Neka je gf epimorfizam. Dokazimo da je onda g epimorfizam. Prema def16 treba dokazati da $\forall g_1, g_2 \in Z^Z$, $g_1g = g_2g \implies g_1 = g_2$. Neka je $g_1g = g_2g$, tj. $(g_1g)(y) = (g_2g)(y)$, $\forall y \in Y$ pa specijalno i za one $y = f(x) \in Y$. No onda je $(g_1g)f = (g_2g)f$, a zbog asocijativnosti kompozicije (propoz.12) je $g_1(gf) = g_2(gf)$. Napokon jer je gf epimorfizam slijedi $g_1 = g_2$, tj i g je epimorfizam. ■

Theorem 15 *Svaki izomorfizam je bimorfizam.*

Proof. Neka je $f \in Y^X$ izomorfizam. Dokazimo da je f bimorfizam tj da je monomorfizam i epimorfizam.
Kako je f izomorfizam to postoji $g \in X^Y$ tako da je $fg = id_Y$ i $gf = id_X$. Kako su identitete bijekcije to su po tm13 i bimorfizmi tj prema def.16 monomorfizmi i epimorfizmi. No onda su i fg i gf takodjer monomorfizmi i epimorfizmi. Kako je dakle fg epimorfizam to je prema tm.14 f epimorfizam, a kako je gf monomorfizam to je prema istom teoremu f monomorfizam. Dakle f je bimorfizam. ■

Remark 6 *Obrat gornjeg teorema* ***opcenito*** *nije istinit u proizvoljnoj kategoriji C. Kazemo da je kategorija* balansirana *ako u njoj vrijedi obrat gornjeg teorema*

Dosad smo promatrali samo kartezijeve produkte dvaju skupova $X \times Y$. No mogu se promatrati kartezijevi produkti vise skupova. Tako ako imamo neku familiju skupova $\{X_\alpha \mid \alpha \in S\}$, kartezijev produkt te familije oznacavamo $\Pi_{\alpha \in S} X_\alpha$, a njene elemente sada pisemo kao $(x_1, \ldots, x_n)$ za $\alpha = 1, \ldots, n$.

Definition 17 *Pod* Kartezijevim produktom sustava skupova $\{X_\alpha \mid \alpha \in S\}$ *podrazumijevamo skup svih funkcija* $f : S \longrightarrow \cup_{\alpha \in S} X_\alpha$ *sa svojstvom da je* $f(\alpha) \in X_\alpha$.

Nije evidentno da je $\Pi_{\alpha \in S} X_\alpha \neq \emptyset$.

Axiom 9 ***IZBORA:*** *Za svaki skup A elementi kojeg su medjusobno diskjunktni skupovi A_α postoji barem jedan skup B koji sadrzi jedan i samo jedan element iz svakog od skupova A_α.*

Definition 18 *Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ neprazan sustav nepraznih skupova i neka je $A = \cup_{\alpha \in s} A_\alpha$. Funkcija $f : \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} \longrightarrow A$ sa svojstvom da je $\forall \alpha \in S$, $f(A_\alpha) \in A_\alpha$*[9] *naziva se* funkcija izbora.

Theorem 16 *Za svaki neprazan sustav nepraznih skupova $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ postoji funkcija izbora.*

Proof. $\forall \alpha \in S$ formirajmo kartezijev produkt $A_\alpha \times \{\alpha\} = A'_\alpha$, tj. $A'_\alpha = \{(x, \alpha) \mid x \in A_a\}$. Sustav $\{A'_\alpha \mid \alpha \in S\}$ se sastoji od medjusobno disjunktnih skupova . Naime ako je $\alpha \neq \beta$ onda je i $A'_\alpha \cap A'_\beta = \emptyset$ jer su svi $(x, \alpha) \in A'_\alpha$ i $(x, \beta) \in A'_\beta$ medjusobno razliciti prema propoz.11.
Prema aksiomu izbora postoji skup B koji sadrzi jedan i samo jedan element svakog od skupova A'_α tj. $B \cap A'_a = \{(a_\alpha, \alpha)\}$, $\forall \alpha \in S$. Po konstrukciji je $a_\alpha \in A_\alpha$ pa mozemo definirati funkciju $f : \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} \longrightarrow \cup_{\alpha \in S} A_\alpha$ stavljajuci $f(A_\alpha) = a_\alpha \in A_\alpha$. Dakle f je funkcija izbora. ■

Imamo dakle da aksiom izbora $\Longrightarrow$ tm.16. Odgovor na pitanje vrijedi li obrnuto daje nam sljedeci teorem:

Theorem 17 *Iz teorema 16 slijedi aksiom izbora.*

Proof. Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ neprazan sustav nepraznih skupova koji su medjusobno disjunktni. Prema tm.16 za taj sustav postoji funkcija izbora $f : \{A_\alpha \mid \alpha \in S\} \longrightarrow \cup_{\alpha \in S} A_\alpha$ takva da je $f(A_\alpha) \in A_\alpha$. Dakle f svakom skupu A_α zbog definicije funkcije (def 14) pridruzuje jedan i samo jedan element (iz A_α), pa skup $B = \{f(A_\alpha) \mid \alpha \in S\}$ koji ima svojstvo da sadrzi jedan i samo jedan element svakog A_α postoji, sto i tvrdi aksiom izbora. ■

- Dakle Aksiom izbora $\Longleftrightarrow$ egzistencija funkcije izbora (tm.16)

[9] Svakom skupu A_α funkcija f dakle moze (zbog definicije funkcije) pridruziti jedan i samo jedan element iz A_α.

- Posebno ako je sustav $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ skup svih nepraznih podskupova nekog skupa imat cemo:
  Neka je A neprazni skup. i $F(A)$ njegov partitivni skup. Primjenom tm.16 mozemo formirati funkciju $f : F(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \cup_{X \in F(A)} X$, t. da je $\forall X \in F(A)$, $f(X) \in X$.

Axiom 10 ***REGULARNOSTI:*** *(von Neumann) Svaki neprazan skup A ima barem jedan element a tako da a i A nemaju zajednickog elementa, tj $a \cap A = \emptyset$*

Theorem 18 *Ne postoji skup $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$ takav da je $\forall n \in \omega$, $a_{n+1} \in a_n$.*

Proof. Pretpostavimo suprotno tj neka postoji skup $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$ takav da je $\forall n \in \omega$, $a_{n+1} \in a_n$. Tada je $\forall n \in \omega$ $a_n \cap A \neq \emptyset$ jer je $a_{n+1} \in a_n$ i $a_{n+1} \in A$. No to je u suprotnosti s aksiomom regularnosti. ■

Dakle Aksiom regularnosti ne dopusta takve cudnovate skupove da svaki element skupa A (osim prvog) bude element svoga prethodnika.

Ekvipotentni skupovi. Kardinalni broj. Konacni i beskonacni sk.

Definition 19 *Reci cemo da su skupovi X i Y* ekvipotentni *i pisati $X \sim Y$ ako postoji bijekcija (izomorfizam) $f : X \longrightarrow Y$.*

Example 4 *1) Neka su $X = \mathbb{N} = \{1, \ldots, n, \ldots\}$; $Y = 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$. Mozemo suopstaviti bijekciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$. Dakle $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$*
2) $X = \{0\}$; $Y = \{0, 1\}$ $X \nsim Y$.

"Biti ekvipotentan" je *relacija ekvivalencije* medju skupovima.

Definition 20 *Kazemo da skupovi X i Y imaju* isti kardinalni broj *i pisemo $kardX = kardY$ $(kX = kY)$ ako su X i Y ekvipotentni.*

Definition 21 *Kazemo da je $kardX$* manji ili jednak *$kardY$ i pisemo $kardX \leq kardY$ $(kX \leq kY)$ ako postoji $Y' \subseteq Y$ takav da je $kardX = kardY'$.*

Proposition 19 *$KardX \leq kardY$* **akko** *postoji injekcija $f : X \longrightarrow Y$.*

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $kX \leq kY$.To znaci da postoji podskup $Y' \subseteq Y$ takav da je $kX = kY'$.Dakle skupovi X i Y' su prema def.20 ekvipotentni a onda prema def.19 postoji bijekcija $g : X \longrightarrow Y'$. Neka je $i : Y' \longrightarrow Y$ inkluzija. Svaka inkluzija je injekcija (primjeru3), pa je kompozicija $f = ig : X \longrightarrow Y$ kompozicija injekcija sto prema napomeni 5 i tm.13 znaci da je i f injekcija.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $f : X \longrightarrow Y$ injekcija. Treba pokazati da je $kX \leq kY$ tj treba pronaci $Y' \subseteq Y$ takav da je $kX = kY'$,dakle prema gornjim definicijama X i Y' bi trebali biti ekvipotentni tj trebala bi izmedju njih postojati bijekcija. Kako je $f : X \longrightarrow Y$ vec injekcija, bijektivno preslikavanje cemo dobiti ako suzimo kodomenu na skup $f(X)$, tj ako uspostavimo funkciju $g : X \longrightarrow f(X) \subseteq Y$. Pronasli smo dakle skup $Y' = f(X) \subseteq Y$ za koji je $kX = kY'$, pa je prema def. 21 $kX \leq kY$.

■

Remark 7 *Ako je $\underline{X \subseteq Y}$ to postoji inkluzija $i : X \longrightarrow Y \quad i(x) = x$. Kako je svaka inkluzija injekcija, to po propoz.19 slijedi $\underline{kX \leq kY}$*

Proposition 20 *Vrijedi:*
(i) $kX = kY \implies kX \leq kY$
(ii) $kX \leq kX$
(iii)$kX \leq kY \ \& \ kY \leq kZ \implies kX \leq kZ$

Proof.
(i)$kX = kY \implies \exists$ bijekcija $f : X \longrightarrow Y$. Posto je f i injekcija prema propoz.19 $\implies kX \leq kY$. ili:
(i) Neka je $kX = kY$.Stavimo li $Y' = Y$ tada je i $Y' \subseteq Y$, pa je i $kX = kY' \implies kX \leq kY$.
(ii) Slijedi iz (i).
(iii)Kako je $kX \leq kY$ i $kY \leq kZ$ to postoje injekcije $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$. Tada je $gf : X \longrightarrow Z$ takodjer injekcija kao kompozicija injekcija, pa po propoz.19 slijedi $kX \leq kZ$. ■

Lemma 21 *Neka je X skup i $F(X)$ njegov partitivni skup. Ako je $f : F(X) \longrightarrow F(X)$ uzlazno preslikavanje (tj $A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B)$, $\forall A, B \in F(X)$) tada f ima svojstvo* fiksne tocke *tj. $\exists K \in F(X)$ t.da je $f(K) = K$.*

Proof. Trebamo dakle pronaci skup K za koji vrijedi da je $f(K) = K$. Jednakost dvaju skupova dokazujemo tako da dokazemo sljedecu konjukciju: $K \subseteq f(K) \ \& \ f(K) \subseteq K$ (vidi Def.13, antisimetricnost relacije "$\subseteq$ "). Najprije cemo definirati K pa cemo dokazati da je upravo tako definiran onaj koji trazimo.

Oznacimo sa $L = \{Y \in F(X) \mid Y \subseteq f(Y)\}$. Ovaj skup je neprazan jer je barem $\emptyset \in L$ (jer prema Def.1 prazan skup je podskup svakog skupa, i $\emptyset \in F(X)$, tj $\emptyset \subseteq f(\emptyset)$).
Definirajmo skup K na sljedeci nacin: $K = \cup L = \cup\{Y \mid Y \in L\} \in F(X)$. Kako je L neprazan to po Aksiomu unije (6) K postoji. Tvrdimo da za ovako definirani K vrijedi $K = f(K)$, tj da je K fiksna tocka za f:

Dokazimo da je $K \subseteq f(K)$:
Ocito $\forall Y \in L$ vrijedi $Y \subseteq K$, pa zbog uzlaznosti od f slijedi: $f(Y) \subseteq f(K)$. No s druge strane jer je $Y \in L$ vrijedi $Y \subseteq f(Y)$, pa zbog tranzitivnosti relacije "$\subseteq$ " na skupu $F(X)$ imamo $\forall Y \in L$, $Y \subseteq f(K)$. No onda je i unija tih Y (tj

skup K) podskup skupa $f(K)$, tj vrijedi: $K = \cup\{Y \mid Y \subseteq f(K)\} \subseteq f(K)$. Dakle $\underline{K \subseteq f(K)}$.

Dokazimo da je $f(K) \subseteq K$:
Kako su $K,\ f(K) \in F(X)$, i $K \subseteq f(K)$, to zbog uzlaznosti od f vrijedi: $f(K) \subseteq f(f(K))$. No to onda znaci da je $f(K) \in L$, pa je pogotovo onda $f(K) \subseteq \cup L = K$, tj dobili smo da je $\underline{f(K) \subseteq K}$.

Kako su obje izjave koje cine gornju konjukciju istinite, to je istinita i konjukcija, tj doista za ovako definirani K vrijedi: $f(K) = K$. Dakle pronasli smo K za koji vrijedi $f(K) = K$, tj f doista ima svojstvo fiksne tocke, sto se i tvrdilo. ■

Theorem 22 ***(Cantor-Bernstein):*** $kX \leq kY \ \ \&\ \ kY \leq kX \implies kX = kY$

Proof. Kako je $kX \leq kY \ \ \&\ \ kY \leq kX$ to po propoz.19 postoje injekcije $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow X$. Da bismo dokazali da to povlaci $kX = kY$, trebamo prema definicijama s pocetka, pronaci bijekciju $\varphi : X \longrightarrow Y$. Tu bijekciju trebamo formirati naravno pomocu injekcija f i g. Vec mozemo zamisliti kako bi trebala izgledati ta bijekcija (vidi sliku) $\varphi(x) = \left\{\begin{smallmatrix} f(x), & x \in K \\ g'(x), & x \in X \backslash K \end{smallmatrix}\right.$ [10]gdje bi $g' : X \backslash K \longrightarrow Y \backslash f(K)$ bilo inverzno (dakle i bijektivno) preslikavanje restrikcije $g\mid_{Y \backslash f(K)}: Y \backslash f(K) \longrightarrow X \backslash K$[11] Medjutim problem je u tom sto nam nista ne garantira postojanje takvog skupa $K \subseteq X$ da bi skupovi $g(Y \backslash f(K))$ i K bili disjunktni, stavise da je bas $\underline{X \backslash g(Y \backslash f(K)) = K}$ kao sto je na slici prikazano, cime bi ujedno osigurali i postojanje funkcije g'. Dokazimo dakle da skup sa podvucenim svojstvom doista postoji:
Imajuci u vidu prethodnu lemu bilo bi najzgodnije definirati neko **uzlazno** preslikavanje $h : F(X) \longrightarrow F(X)$ za koje bi onda vrijedilo da $\exists\ K \subseteq X$, za koji je $h(K) = K$ te definirati ga sa $h(A) = X \backslash g(Y \backslash f(A))$, $A \in F(X)$ Tada bi dakle postojao skup $K \subseteq X$ za koji bi vrijedilo $h(K) = X \backslash g(Y \backslash f(K)) = K$ a to je upravo ono sto zelimo. Preostaje nam dakle samo dokazati da je ovako definirano h doista uzlazno preslikavanje:
Neka su $A, B \in F(X)$ takvi da je $A \subseteq B$. Trebamo pokazati da je onda i $h(A) \subseteq h(B)$ .Kako su f i g injekcije vrijedi sljedece zakljucivanje:
$A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B) \implies Y \backslash f(A) \supseteq Y \backslash f(B)$ no onda je i $g(Y \backslash f(A)) \supseteq g(Y \backslash f(B))$ ali tada je $\underbrace{X \backslash g(Y \backslash f(A))}_{=h(A)} \subseteq \underbrace{X \backslash g(Y \backslash f(B))}_{=h(B)}$ tj dobili smo da je onda $h(A) \subseteq h(B)$, tj dokazali smo da je onako definirano h doista uzlazno preslikavanje.
Dakle konsturirana funkcija $\varphi : X \longrightarrow Y$ doista je bijekcija jer su njene sastavnice bijektivne, pa prema definicijama 19 i 20 slijedi da je $kX = kY$ sto je i trebalo dokazati. ■

Corollary 23 *Neka su X, Y, Z skupovi za koje vrijedi $X \subseteq Y \subseteq Z$. Ako je $kX = kZ$ onda je $kX = kY = kZ$.*

[10]Kako je f injekcija, to je $f\mid_K: K \longrightarrow f(K)$ i surjektivno, tj bijekcija.

[11]Da bi postojalo inverzno preslikavanje g' treba naravno $g\mid_{Y \backslash f(K)}$biti ne samo injektivno nego i surjektivno tj bijekcija. $g\mid_{Y \backslash f(K)}$ bi bilo surjektivno kad bi njegova kodomena bila slika domene tj kad bi $X \backslash K = g(Y \backslash f(K))$, (vidi dalje dokaz!)

Proof. Kako je $X \subseteq Y$ to prema Nap.7 slijedi $\underline{kX \leq kY}$. Isto tako iz $Y \subseteq Z \implies kY \leq kZ$. Kako je $kX = kZ$ to imamo da je $kY \leq kZ = kX$ tj $\underline{kY \leq kX}$. Iz podvucenoga slijedi prema Cantor-Bernsteinovom tm.22 slijedi $kX = kY$, tj $kX = kY = kZ$. ■

Example 5 $X = [0,3] \subseteq \mathbb{R}$, $Y = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$
Ocito je $Y \subseteq X$ *pa je* $kY \leq kX$. *Neka je* $f : X \longrightarrow Y$ *dano sa* $f(x) = \frac{1}{3}x$. f *je injekcija*[12] *pa je zbog propoz. 19* $kX \leq kY$. *Zbog C-B tm.22 je onda* $kX = kY$.

Example 6 $X = [0,1]$, $Y = [0,1\rangle$
$Y \subseteq X \implies kY \leq kX$. *Definirajmo* $f : X \longrightarrow Y$ *sa* $f(x) = \frac{1}{2}x$. f *je injekcija(linearna funkcija), pa je* $kX \leq kY$. *Dakle* $kX = kY$. *(Tesko bi bilo* *<u>direktno</u>* *naci bijekciju sa* X *u* Y *iz koje bi prema prvim definicijama ovog poglavlja slijedilo da su* X *i* Y *ekvipotentni tj iste kardinalnosti).*

- Iz primjera $\implies [a,b] \sim [a,b\rangle \sim \langle a,b] \sim \langle a,b\rangle$, no takodjer i $\boxed{[a,b] \sim [c,d]\,,\ a \neq b\ \ \&\ \ c \neq d}\, \forall a,b$
- $\mathbb{R} \sim [a,b]$, $\forall a,b$.

Definition 22 *Kazemo da je skup* X beskonacan *ako postoji* $* \notin X$ *takav da je* $k(X \cup \{*\}) = kX$. *(Da bi osigurali da* $* \notin X$ *mozemo* $\forall X$ *uzeti* $* = \{X\}$[13], *pa reci da je* $\underline{X \text{ beskonacan ako je } k(X \cup \{\{X\}\}) = kX}$*)*[14].
Kazemo da je X konacan *ako nije beskonacan.*

Example 7 $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, $\omega = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
Definirajmo $f : \omega \longrightarrow \mathbb{N}$ *sa* $f(n) = n+1$. *Ovako definirani* f *je ocito bijekcija pa je* $k\mathbb{N} = k\omega = k(\mathbb{N} \cup \{0\})$. *Kako* $0 \notin \mathbb{N}$ *prema prethodnoj definiciji slijedi da je* $\mathbb{N}$ *beskonacan. (uzeli smo dakle* $* = 0$*)*

Example 8 *Skupovi* $\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}$ *nisu beskonacni tj konacni su jer ne postoje trazene bijekcije. Npr.* $\emptyset$ *nije beskonacan jer ne postoji bijekcija* $f : \emptyset \cup \{*\} = \{*\} \longrightarrow \emptyset$, *isto tako ne postoji ni bijekcija* $g : \{\emptyset\} \cup \{*\} = \{\emptyset, *\} \longrightarrow \emptyset$ *kao ni* $h : \{1\} \cup \{*\} \longrightarrow \{1\}$.

Theorem 24 *Skup* X *je beskonacan* ***akko*** *je ekvipotentan svom pravom podskupu.*

Proof.

$\boxed{\implies}$ Neka je X beskonacan. To znaci da postoji $* \notin X$ t.da je $k(X \cup \{*\}) = kX$ tj. postoji bijekcija $f : X \cup \{X\} \longrightarrow X$. No tada je i restrikcija $f|_X : X \longrightarrow X \backslash \{f(*)\}$ bijekcija pa kako je $X \backslash \{f(*)\} \subsetneq X$ to prema def.19 slijedi da je X ekvipotentan svom pravom podskupu.

[12] jer f je linearna funkcija

[13] Pokazimo da neprazan skup $* = \{X\}$ je takav da $* \notin X$. Prema aksiomu regularnosti 10 neprazan skup $*$ ima barem jedan element (a to mora biti X jer je jedini) takav da je $* \cap X = \emptyset$. $\implies \boxed{?}\, * \notin X$

[14] Uzimajuci u obzir definicije 20 i 19 to mozemo reci i ovako: X je beskonacan ako postoji bijekcija $f : X \cup \{\{X\}\} \longrightarrow X$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je X ekvipotentan svom pravom podskupu X'. Kako je $X' \subsetneq X$ to postoji $x_0 \in X \backslash X'$. Tada je $\underline{X' \subseteq X' \cup \{x_0\} \subseteq X}$. Kako je $X \sim X'$ to prema def. 20 znaci da je $\underline{kX = kX'}$. No podvuceno su upravo uvjeti korolara23 pa slijedi $\underline{kX' = k(X' \cup \{x_0\}) = kX}$. Uzmimo sada neki $* \notin X$. Tada zbog $X \sim X'$ slijedi da je$X \cup \{*\} \sim X' \cup \{x_0\}$ (jer $* \notin X$ i $x_0 \notin X'$)a iz toga opet prema def.20 da je $\underline{k(X \cup \{*\}) = k(X' \cup \{x_0\})}$. Iz posljednje dvije jednakosti slijedi $k(X \cup \{*\}) = kX$, a kako $* \notin X$, prema def.22 konacno slijedi da je X beskonacan skup.

■

Corollary 25 *Skup X je* konacan ***akko*** *je* <u>*svaka*</u> *injekcija $f : X \longrightarrow X$ ujedno i surjekcija*

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je X konacan skup. Neka je $f : X \longrightarrow X$ injekcija. Treba pokazati da je f surjekcija.
Pretpostavimo suprotno tj da f nije surjekcija. Tada je $f(X) \subsetneq X$. Oznacimo $f(X) = X'$ No tada je $f : X \longrightarrow X'$ bijekcija pa prema def.19 slijedi da je X ekivpotentan svom pravom podskupu X' sto bi prema prethodnom teoremu znacilo da je X beskonacan, sto je kontradikcija s Pp da je X konacan. Dakle f je surjekcija.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je svaka injekcija : $X \longrightarrow X$ ujedno i surjekcija. Treba dokazati da je tada X konacan skup.
Pretpostavimo suprotno tj da je X beskonacan. Prema tm.24 slijedi da postoji $X' \subsetneq X$ i bijekcija $f : X \longrightarrow X'$. Neka je $g = i \circ f : X \longrightarrow X$, $(i : X' \longrightarrow X, \text{ inkluzija})$. Kako je svaka inkluzija injekcija i kako je f bijekcija (time i injekcija) to je g kao kompozicija dvaju injekcija prema napomeni 5 i teoremu13 takodjer injekcija. No zbog pretpostavke da je svaka injekcija : $X \longrightarrow X$ ujedno i surjekcija slijedi da je $g : X \longrightarrow X$ i surjekcija tj $g(X) = X$. Sada imamo $g(X) = if(X) = i(f(X)) = f(X)$ =jer je f bijekcija= X'. Iz posljednje dvije jednakosti slijedi da je $X = X'$ sto je kontradikcija s $X' \subsetneq X$ (posljedica pretpostavke da je X beskonacan). Dakle X je konacan.

■

Theorem 26 *Ako je A beskonacan skup i $A \subseteq X$ onda je i X beskonacan.*
Ako je A konacan skup i $X \subseteq A$ onda je i X konacan.

Proof.
Neka je A beskonacan skup. Prema tm.24 je onda A ekvipotentan svom pravom podskupu $A' \subsetneq A$ tj postoji bijekcija $f : A \longrightarrow A'$.Trebamo pokazati da je X beskonacan tj trebamo naci bijekciju F sa X u neki njegov pravi podskup. Za formiranje te bijekcije posluzit cemo se bijekcijom f koja je definirana samo

na $A \subseteq X$,(a uzima vrijednosti iz A') pa nam je potrebna jos jedna bijekcija definirana na ostatku skupa X tj na $X \backslash A$ (koja uzima vrijednosti na $X \backslash A$). Najjednostavnije je dakle formirati trazenu bijekciju Fovako: $F : X \longrightarrow X \backslash A \cup A' = X' \subsetneq X$ (jer je $A \subsetneq A$) i $F(x) = \{^{f(x),\ x \in A}_{x,\ x \in X \backslash A}$. Po konstrukciji je F bijekcija, sto znaci da je X ekvipotentan svom pravom podskupu, a to prema tm.24 znaci da je X beskonacan skup.

Neka je A konacan skup i $X \subseteq A$.Treba pokazati da je onda i X konacan. Pretpostavimo suprotno, tj da je onda X beskonacan. No onda bi prema vec dokazanom dijelu teorema znacilo da je A takodjer beskonacan sto je kontradikcija s Pp da je A konacan. Dakle X je konacan. ■

Oznacimo $A_n = \{1, \ldots, n\}$.

Theorem 27 *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je A_n konacan skup.*

Proof. Dokaz provodimo indukcijom:

$A_1 = \{1\} je$ konacan skup (kako je pokazano u jednom od gornjih primjera)

Pretpostavimo da su $A_1, \ldots, A_n$ konacni skupovi.

Dokazimo da je tada i A_{n+1} konacan skup:

Prema korolaru25 dovoljno je dokazati da je svaka injekcija $f : A_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ ujedno i surjekcija.

Neka je $f : A_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ proizvoljna injekcija. Razlikujemo dva slucaja:

1) $f(n+1) = n+1$

2) $f(n+1) \in A_n$

1) Ako je $f(n+1) = n+1$ onda je $f(A_n) \subseteq A_n$. No tada je $f\ |_{A_n} : A_n \longrightarrow A_n$ injekcija, pa jer je A_n po pretpostavci indukcije konacan skup, je i surjekcija zbog korolara25. No uz $f(n+1) = n+1$ je onda i $f : A_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ takodjer surjekcija sto je i trebalo dokazati. Dakle A_{n+1} je konacan skup.

2) Neka je $f(n+1) \in A_n$. Oznacimo $k = f(n+1)$. Trebamo dokazati da je injekcija $f : A_{n+1} \longrightarrow A_{n+1}$ surjekcija, tj da je $\underline{f(A_{n+1}) = A_{n+1}}$.

Dokazimo najprije da posto je $f(n+1) = k \in A_n$, mora postojati neki $k' \in A_n$ t. da je $f(k') = n+1$. Pretpostavimo suprotno tj da $\forall k' \in A_n$ je $f(k') \neq n+1$. Tada je $f(A_{n+1}) = A_n(\boxed{?}\ (f(A_{n+1}) \subseteq A_n)$. No onda je $f : A_{n+1} \longrightarrow f(A_{n+1}) = A_n$ surjekcija tj (zbog naslijedjene injektivnosti) bijekcija, pa je $A_n \sim A_{n+1} = A_n \cup \{n+1\}$ tj $kA_n = k(A_n \cup \{n+1\})$ pa jer $n+1 \notin A_n$ zbog def.22 slijedi da je A_n beskonacan, a to je u suprotnosti s Pp indukcije da je A_n konacan. Dakle mora postojati neki $k' \in A_n$ takav da je $f(k') = n+1$.

Do trazene potcrtane jednakosti sad mozemo doci na sljedeci nacin:

Definirajmo funkciju $g : A_n \longrightarrow A_n$ na sljedeci nacin: $g(i) = \{^{f(i),\qquad\quad i \neq k'}_{k = f(n+1),\quad i = k'}$.

g je injekcija jer je f injekcija . Pa jer je po Pp indukcije A_n konacan to je zbog korolara25 g surjekcija, tj. $g(A_n) = A_n$.

Sada imamo $g(A_n) = \{f(1), \ldots, f(k'-1), f(k'+1), \ldots, f(n)\} \cup \{k = f(n+1)\} = A_n$. Dalje je onda $A_{n+1} = A_n \cup \{n+1\} = A_n \cup \{f(k')\} = \{f(1), \ldots, f(k'), \ldots, f(n), f(n+1)\} = \{f(1), \ldots, f(n+1)\} = f(A_{n+1})$. Dakle $f(A_{n+1}) = A_{n+1}$, tj f je surjekcija, sto je i trebalo dokazati, pa i u ovom slucaju izlazi da je A_{n+1} konacan skup. ■

Corollary 28 *Za $n \neq m$, A_n i A_m nisu ekvipotentni skupovi.*

Proof. Pretpostavimo suprotno tj da postoje $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, i $A_n \sim A_m$. Bez smanjenja opcenitosti pretpostavimo da je $n < m$. Tada je $A_n \subsetneq A_m$. Kako je $A_n \sim A_m$ to iz tm.24 slijedi da je A_m beskonacan skup, no to je u suprostnosti s tm.27. ■

Theorem 29 *Svaki konacni skup je prazan ili je ekvipotentan nekom A_n, $n \in \mathbb{N}$*

Proof. Za prazan skup teorem je istinit..

Pretpostavimo suprotno tj. da $\exists K \neq \emptyset$ i K konacan koji nije ekvipotentan nijednom A_n. Konstruramo li injekciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow K$ kao posljedicu cemo dobiti da je K beskonacan sto je kontradikcija s Pp da je K konacan sto bi bio kraj dokaza. Naime ako je f injekcija to je onda $f(\mathbb{N}) \subseteq K$, ali je onda $f : \mathbb{N} \longrightarrow f(\mathbb{N})$ surjekcija tj bijekcija pa je $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N})$ tj $f(\mathbb{N})$ je beskonacan. A kako je $f(\mathbb{N}) \subseteq K$ prema tm.26 slijedi da je i K beskonacan sto je kontradikcija s Pp da je K konacan, cime bi tvrdnja teorema bila dokazana.

Preostaje nam dakle konstruirati injekciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow K$. Konstrukciju provodimo induktivno. Naime $\forall n \in \mathbb{N}$ konstruirat cemo injekciju $f_n : A_n \longrightarrow K$ tako da je $\underline{f_{n+1} |_{A_n} = f_n}$.
Kako je $K \neq \emptyset$ to postoji injekcija $f_1 : A_1 \longrightarrow K$.
Pretpostavimo da postoje injekcije $f_1, \ldots, f_n$ s trazenim svojstvom. Kako je $f_n(A_n) \subsetneq K$ ... (u slucaju da je $f_n(A_n) = K$ bilo bi $A_n \sim K$ sto je u suprotnosti s Pp da K nije ekvipotentan niti jednom A_n)... to postoji $x_{n+1} \in K \backslash f_n(A_n)$.
Definirajmo sad preslikavanje $f_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow K$ tako da je $f_{n+1} |_{A_n} = f_n$ i $f(n+1) = x_{n+1}$. Kako je po Pp indukcije f_n injekcija i $x_{n+1} \in K \backslash f_n(A_n)$ slijedi da je f_{n+1} takodjer injekcija.
Dakle na ovakav nacin smo konstruirali injekcije f_n $\forall n \in \mathbb{N}$, pa mozemo definirati trazenu injekciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow K$ sa $\underline{f(n) = f_n(n)}$.

Preostaje jos samo dokazati da je ovako definirano f doista injekcija:
Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ i neka je $f(n) = f(m)$. Prema (7) treba pokazati da je tada $n = m$.
Bez smanjenja opcenitosti mozemo pretpostaviti da je $n < m$. Tada imamo:
$f(n) = f_n(n) = f_{n+1}(n) = f_{n+2}(n) = \cdots = f_m(n)$, No s druge strane takodjer imamo:$f(m) = f_m(m)$ .Kako je $f(n) = f(m)$ to iz posljednjih jednakosti slijedi da je $f_m(n) = f_m(m)$ pa jer je f_m injekcija $\forall m \in \mathbb{N}$, dobijamo konacno prema (7) da je $n = m$.

Dakle postoji $f : \mathbb{N} \longrightarrow K$ injektivno, sto prema gornjem razmatranju znaci da nas je pretpostavka da postoji $K \neq \emptyset$ konacan i da nije ekvipotentan ni s jednim A_n $\forall n \in \mathbb{N}$, dovela do kotradikcije. Dakle vrijedi tvrdnja teorema u punom opsegu. ■

Remark 8 *Neka je $K \neq \emptyset$ konacan skup. Prema tm.29 je onda ekvipotentan nekom A_n tj postoji $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $f : A_n \longrightarrow K$. Oznacimo redom $f(1) = x_1, \ldots, f(n) = x_n$. Sada je dakle $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Theorem 30 *Skup X je beskonacan* ***akko*** *postoji injekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Proof.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka postoji injekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Treba dokazati da je X beskonacan. Kako postoji injekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ to je $f(\mathbb{N}) \subseteq X$. No kako je $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$ to je $f(\mathbb{N})$ beskonacan pa je prema tm. 26 takav i X kao njegov nadskup.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je X beskonacan. Treba konstruirati injekciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ konstruirat cemo injekciju $f_n : A_n \longrightarrow X$ tako da je $\underline{f_{n+1}|_{A_n} = f_n}$. Konstrukciju provodimo induktivno:
Kako je $X \neq \emptyset$ to postoji injekcija $f_1 : A_1 \longrightarrow X$.
Pretpostavimo da smo konstruirali injekcije $f_1, \ldots, f_n$ s trazenim svojstvom. Kako je $f_n(A_n) \subsetneq X$ ...(u slucaju $f_n(A_n) = X$ bi f_n bile bijekcije pa bi bilo $A_n \sim X$ tj X bi bio konacan sto je u suprotnosti s pretpostavkom da je X beskoncan)... to je $X \backslash f_n(A_n) \neq \emptyset$ pa postoji $x_{n+1} \in X \backslash f_n(A_n)$.
Definirajmo $f_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow X$, $f_{n+1}|_{A_n} = f_n$ i $f_{n+1}(n+1) = x_{n+1}$.Kako je po Pp indukcije f_n injekcija i $x_{n+1} \in X \backslash f_n(A_n)$ slijedi da je f_{n+1} takodjer injekcija.

Dakle na ovakav nacin smo konstruirali injekcije f_n $\forall n \in \mathbb{N}$, pa mozemo definirati trazenu injekciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ sa $\underline{f(n) = f_n(n)}$. Kako je pokazano u dokazu prethodnog teorema , ovako definirano f je injekcija.

■

Oznacimo $kA_n = n$, a $k\mathbb{N} = \aleph_0$
Iz teorema 30 i propozicije 19 proizlazi da za svaki beskonacni skup X vrijedi:
$\boxed{\aleph_0 \leq kX}$
$0 = kard\emptyset$
$\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \cdots$

Definition 23 $kX < kY \iff kX \leq kY \ \& \ kX \neq kY$

Remark 9 *Primijetimo da zbog propoz.19 i def.20 gornju definiciju mozemo izreci i ovako: $kX < kY \iff$ postoji injekcija: $X \longrightarrow Y$ & $X \nsim Y$.*

Sada zbog prethodne definicije i def.21 mozemo pisati:
$0 < 1 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0 < \cdots$[15]

Theorem 31 *Za svaki skup X je $\boxed{k2^X = kF(X)}$, gdje je $2^X = \{\varphi \mid \varphi : X \longrightarrow \{0,1\}\}$, a $F(X)$ je partitivni skup od X.*

[15] Prirodni brojevi su kardinali konacnih skupova.

Proof. Definirajmo najprije *karakteristicnu funkciju* χ_A za $A \subseteq X$: $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ sa:

$$\chi_A(x) = \{^{0, x \in X \backslash A}_{1, x \in A} \tag{10}$$

Ako je $X = \emptyset$ onda je $F(X) = \{\emptyset\}$, a $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, pa vrijedi tvrdnja teorema.

Ako je $X \neq \emptyset$. Prema definicjama 20 i 19 za dokazati jednakost kardinalnih brojeva dva skupa dovoljno je pronaci bijekciju izmedju ta dva skupa.
Definirajmo zato preslikavanje $\Phi : F(X) \longrightarrow 2^X$ na sljedeci nacin: $\boxed{\Phi(A) = \chi_A}$, $A \in F(X)$.
Dokazimo da je Φ bijekcija:

(i) Dokazimo da je Φ injekcija: Neka je za $A, B \in F(X)$, $\Phi(A) = \Phi(B)$. Treba pokazati da je onda $A = B$. Kako je $\Phi(A) = \Phi(B)$ to je onda $\chi_A = \chi_B$.
$\forall x \in A$ vrijedi: $\chi_A(x) = 1 = \chi_B(x) \implies x \in B$. Dakle $x \in A$ & $x \in B \implies A \subseteq B$
$\forall x \in B$ vrijedi: $\chi_B(x) = 1 = \chi_A(x) \implies x \in A$. Dakle $x \in B$ & $x \in A \implies B \subseteq A$
slijedi $A = B$, tj Φ je injekcija.

(ii) Dokazimo da je Φ surjekcija. Uzmimo proizvoljnu $\varphi \in 2^X$ (tj $\varphi : X \longrightarrow \{0,1\}$). Trebamo pronaci $A \in F(X)$ takav da je $\Phi(A) = \varphi$. Uzmimo za A skup svih elemenata iz X koje je φ preslikalo recimo u 1, tj $A = \{x \in X \mid \varphi(x) = 1\} \subseteq X$ i $A \in F(X)$, te vrijedi $\chi_A = \varphi$. Dakle $\Phi(A) = \chi_A = \varphi$ pa je Φ doista surjekcija.

Φ je dakle bijekcija. ■

Theorem 32 ***(Cantor):****Za svaki skup X vrijedi:* $\boxed{kX < k2^X}$

Proof. Posluzit cemo se def.23. Trebamo dakle pokazati da je (i) $kX \leq k2^X$ i (ii)$kX \neq k2^X$

(i) Da bismo pokazali $kX \leq k2^X$ dovoljno je zbog tm.31 pokazati da vrijedi $kX \leq kF(X)$. Prema propoz. 19 dovoljno je pronaci injekciju $\Phi : X \longrightarrow F(X)$. Definiramo li $\Phi(x) = \{x\} \in F(X)$, Φ ce doista biti injekcija, pa zbog pomenutog teorema i propozicije slijedi tvrdnja.

(ii) Da bismo pokazali da je $kX \neq k2^X$ dovoljno je zbog definicija 20 i 19 pokazati da svaka funkcija $f : X \longrightarrow 2^X$ nije surjekcija (jer tada nije bijekcija). Neka je $f : X \longrightarrow 2^X$ proizvoljna funkcija. Za svaki $x \in X$ je $f(x) \in 2^X$ tj $f(x) = \varphi_x : X \longrightarrow \{0,1\}$. Pronadjimo sad neki element iz 2^X u koji se funkcijom f nece preslikati nijedan element iz X. Element $\varphi \in 2^X$ koji ce zadovoljiti taj zahtjev moze imati svojstvo $\varphi(x) = 1 - \varphi_x(x)$. Najprije φ je dobro definirano tj doista je funkcija iz X u $\{0,1\}$. Dokazimo sad da φ nije slika po f-u nijednog elementa $x \in X$. Zaista za proizvoljni $x \in X$ vrijedi:
$(f(x))(x) = \varphi_x(x)$, ali je $\varphi(x) = 1 - \varphi_x(x)$, dakle $f(x) \neq \varphi$, $\forall x \in X$ tj $\exists$ element $\varphi \in 2^X$ takav da $\forall x \in X$ je $f(x) \neq \varphi$, tj preslikavanje f nije surjektivno.
■

Remark 10 *U dokazu (ii) gornjeg teorema moglo se zbog tm.31 dokazati i* $kX \neq kF(X)$.

Proof. Pretpostavimo suprotno tj neka postoji bijekcija $f : X \longrightarrow F(X)$ .Definirajmo skup $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. A je dobro definiran skup. Kako je f bijekcija i $A \in F(X)$ to mora postojati neki $a \in X$ za koji je $f(a) = A$. No tada je $a \in A \iff a \notin f(a) = A$ sto je ocita kontradikcija, dakle ne postoji bijekcija izmedju X i $F(X)$ cime je tvrdnja dokazana. ■

Definition 24 *Kazemo da je skup* X prebrojiv *ako je* $X \sim \mathbb{N}$ *tj* $kX = k\mathbb{N} = \aleph_0$

Remark 11 *Ako je* X *prebrojiv postoji bijekcija* $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. *Oznacimo* $\forall n \in \mathbb{N}$ *,* $f(n) = x_n \in X$. *Imamo:* $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$,*dakle* X *mozemo prikazati u obliku niza.*

Remark 12 *Ako je* $\underline{X \text{ prebrojiv}}$ *to prema gornjoj napomeni znaci da postoji bijekcija* : $\mathbb{N} \longrightarrow X$. *No kako je svaka bijekcija i injekcija to dalje znaci da postoji injekcija* : $\mathbb{N} \longrightarrow X$, *a to pak prema tm.30 znaci da je* $\underline{X \text{ i beskonacan}}$

Theorem 33 *Svaki podskup prebrojiva skupa je ili konacan ili prebrojiv.*

Proof. Neka je $A \subseteq X$ zadani podskup prebrojiva skupa X.

Ako je A konacan tvrdnja teorema je ispunjena.

Neka je A beskonacan. Da bismo dokazali da je prebrojiv trebamo pronaci

bijekciju $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$.
Kako je X prebrojiv, to prema gornjoj definiciji znaci da postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Definirajmo sada g induktivno:
Neka je $g(1) = f(i_1)$ gdje je i_1 najmanji prirodni broj takav da je $f(i_1) \in A$.
Pretpostavimo da smo na taj nacin definirali $g(1), \ldots, g(n)$.
Stavimo sada $g(n+1) = f(i_{n+1})$ gdje je $i_{n+1} \in \mathbb{N}$ najmanji prirodni broj takav da je $i_{n+1} > i_n$ i $f(i_{n+1}) \in A$. Dakle $g(n)$ je definiran sada $\forall n \in \mathbb{N}$. g je ocito bijekcija (jer je f bijekcija) sto smo i trazili, dakle A je prebrojiv. ■

Theorem 34 *Svaki beskonacan skup* X *sadrzi prebrojiv podskup* $A \subseteq X$.

Proof. Kako je X beskonacan sigurno je $\neq \emptyset$, pa postoji $x_1 \in X$. No sada je $X \backslash \{x_1\} \neq \emptyset$ (jer bi u protivnom bilo $X = \{x_1\} tj$ X bi bio konacan a to nije) pa postoji $x_2 \in X \backslash \{x_1\}$ itd.
Pretpostavimo da smo na taj nacin odabrali razlicite elemente $x_1, \ldots, x_n \in X$. Tada je skup $X \backslash \{x_1, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$ (jer bi u prtivnom bilo $X \sim A_n$ tj X bi bio konacan a to nije) pa postoji $x_{n+1} \in X \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$. Stavimo sada $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq X$. Definirajmo preslikavanje $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ sa $f(n) = x_n$ .f je ocito bijekcija (vidi napomenu 11) pa je $A \subseteq X$ prebrojiv. ■

Theorem 35 *Ako je* X *beskonacan skup, a* Y *konacan ili prebrojiv onda je* $k(X \cup Y) = kX$.

Proof. Trebamo pronaci bijekciju $f : X \longrightarrow X \cup Y$. Pretpostavimo da su X i Y disjunktni.
[Ako nisu, primijenimo dokaz nad skupovima X i $Y \backslash X$ koji su disjunktni ali

i udvoljavaju uvjetima teorema tj $Y \backslash X \subseteq Y$ je takodjer konacan ili prebrojiv zbog tm.33 (primijenjenog na prebojiv ili konacan Y)].
Kako je X beskonacan to prema gornjem teoremu postoji prebrojiv podskup $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subseteq X$.

Ako je Y prebrojiv, tj ako je $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$, onda definirajmo funkciju $f : X \longrightarrow X \cup Y$ na sljedeci nacin:
$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \in X \backslash A \\ x_n, & x = x_{2n} \\ y_n, & x = x_{2n-1} \end{array} \right\}$. f je ocito bijekcija sto smo i trazili pa je doista $k(X \cup Y) = kX$.

Ako je Y konacan, tj ako je $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, onda definirajmo $f : X \longrightarrow X \cup Y$ na sljedeci nacin:
$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \in X \backslash A \\ y_i, & x = x_i \ \ (i = 1, \dots, n) \\ x_k, & x = x_{n+k} \end{array} \right\}$. f je opet bijekcija pa je $k(X \cup Y) = kX$. ■

Corollary 36 *Unija konacnog broja prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Proof. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i X_n prebrojiv skup. Trebamo dokazati da je za svaki $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ prebrojiv skup tj da je $k(X_1 \cup \cdots \cup X_k) = \aleph_0$.
[Kako je X_n prebrojiv to prema napomeni 12 znaci da je X_n $(\forall n \in \mathbb{N})$ i beskonacan].

Dokaz provodimo indukcijom po $k \geq 2$:
$X_1 \cup X_2$ je unija beskonacnog (jer je prebrojiv) skupa X_1 i prebrojivog skupa X_2 pa je po tm.35 $k(X_1 \cup X_2) = kX_1 = \aleph_0$, tj $X_1 \cup X_2$ je prebrojiv skup.
Pretpostavimo da je $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ prebrojiv skup (time i beskonacan).
Tada je $X_1 \cup \cdots \cup X_{k+1} = (X_1 \cup \cdots \cup X_k) \cup X_{k+1}$ a to je unija beskonacnog skupa $(X_1 \cup \cdots \cup X_k)$ i prebrojivog skupa X_{k+1} pa opet primjenom tm.35 izlazi da je $\underline{k(X_1 \cup \cdots \cup X_{k+1})} = k((X_1 \cup \cdots \cup X_k) \cup X_{k+1}) = k(X_1 \cup \cdots \cup X_k) \underline{= \aleph_0}$.
Dakle tvrdnja teorema vrijedi $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Lemma 37 *Direktni Kartezijev produkt* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je prebrojiv.*

Proof. Treba pokazati da je $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k\mathbb{N} = \aleph_0$. Da bismo pokazali jednakost tih kardialnih brojeva posluzit cemo se Cantor-Bernstein teoremom 22. No najprije trebamo pokazati da je zaista $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq k\mathbb{N}$ i da je $k\mathbb{N} \leq k(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ sto su uvjeti C-B teorema. Da bismo pokazali da je $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq k\mathbb{N}$ treba prema propoz.19 pronaci injekciju $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a da bismo pokazali da je $k\mathbb{N} \leq k(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ treba pronaci injekciju $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definirajmo f formulom: $f(n, m) = 2^n 3^m$.Pokazimo da je f injekcija: Neka je $f(n, m) = f(k, l)$, $(n, m), (k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Treba pokazati da je onda $(n, m) = (k, l)$. Kako je $f(n, m) = f(k, l)$ to je onda $2^n 3^m = 2^k 3^l$. Pomnozimo cijelu jednakost s 2^{-k} (bez smanjenja opcenitosti pretpostavimo da je $n \geq k$). Imamo onda $2^{n-k} 3^m = 3^l$. No kako je 3^l neparan broj (a 2^a paran $\forall a \in \mathbb{N}$) to da bi i lijeva strana bila uvijek neparna mora biti $n - k = 0$ tj $n = k$, ali onda mora biti i $m = l$, pa je $(n, m) = (k, l)$ prema propoz.11 . Dakle f je injekcija pa doista vrijedi $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq k\mathbb{N}$.

Definirajmo g sa $g(n) = (n,1)$. Pokazimo da je g injekcija. Neka je $g(n) = g(m)$, $n,m \in \mathbb{N}$. Treba pokazati da je onda $n = m$. Kako ej $g(n) = g(m)$ to je $(n,1) = (m,1)$ ali onda opet zbog propoz.11 slijedi da je $n = m$. Dakle g je injekcija pa doista vrijedi $k\mathbb{N} \leq k(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Konacno zbog Cantor-Bernstein teorema je $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k\mathbb{N} = \aleph_0$ tj skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv. ■

Theorem 38 *Direktni produkt dva prebrojiva skupa je prebrojiv skup.*

Proof. Neka su X i Y prebrojivi skupovi. Treba dokazati da je $X \times Y$ prebrojiv. Zbog prethodne leme je $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$ tj $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv, pa je dovoljno pronaci bijekciju $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y$.
Kako su X i Y prebrojivi, to postoje bijekcije $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ i $g : \mathbb{N} \longrightarrow Y$. Definirajmo onda preslikavanje h sa: $h(n,m) = (f(n), g(m))$. Lako se provjeri da je h bijekcija upravo jer su f i g bijekcije, pa je zbog definicija 19 i 20 $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k(X \times Y)$ .Zbog prethodne leme je onda i $k(X \times Y) = \aleph_0$ tj $X \times Y$ je prebrojiv sto je i tvrdnja teorema. ■

Corollary 39 *Direktni produkt od konacno mnogo prebrojih skupova je prebrojiv skup.*

Proof. Neka je $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n prebrojiv skup. Treba pokazati da je $\forall k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $X_1 \times \cdots \times X_k$ prebrojiv skup. Dokaz provodimo indukcijom po $k \geq 2$.
Za $k = 2$ tvrdnja je istinita jer to tvrdi prethodni teorem.
Pretpostavimo da je $X_1 \times \cdots \times X_k$ prebrojiv skup.
Dokazimo da je $X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$ prebrojiv: Kako je $X_1 \times \cdots \times X_{k+1} = \boxed{?}$[16] $(X_1 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1}$ to imamo ovdje direktni produkt dva prebrojiva skupa $(X_1 \times \cdots \times X_k)$ i X_{k+1} pa je zbog prethodnog teorema taj produkt prebrojiv, odnosno $X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$ je prebrojiv.
Pokazali smo dakle da je tvrdnja tocna $\forall k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. ■

Corollary 40 *Unija od prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup*

Proof. Neka su $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n prebrojivi skupovi. Treba dokazati da je $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ prebrojiv skup. Razlikujemo dva slucaja:

(i) Svi X_n su medjusobno u parovima disjunktni.
Kako su svi X_n prebrojivi to $\forall n \in \mathbb{N}$ postoji bijekcija $f_n : X_n \longrightarrow \mathbb{N}$. Da bismo dokazali da je $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ prebrojiv dovoljno je prenaci bijekciju $f : \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (jer je prema lemi37 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv). Definirajmo f na sljedeci nacin: $f(x) = (n, f_n(x))$ ako je $x \in X_n$. Lako se dokaze da je ovako definirano f bijekcija jer su sve f_n bijekcije. Dakle prema definicijama 19 i 20 slijedi $k(\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n) = k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$ tj $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ je prebrojiv skup sto teorem i tvrdi.

(ii) X_n nisu u parovima disjunktni.
Pokusajmo pronaci skupove koji ce biti disjunktni (i prebrojivi) a cija ce unija biti jednaka $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ pa cemo dokazati na slican nacin kao pod (i). Definirajmo

[16] Kartezijev produkt sustava skupova se definira kao skup funkcija cija je kodomena unija tih skupuva..pa vjerojatno zbog asocijativnosti unije..

stoga skupove Y_k po $k \in \mathbb{N}$ tako da je $Y_1 = X_1, \ldots, Y_n = X_n \backslash \left(\cup_{i=1}^{n-1} X_i\right)$. Ovako definirani svi Y_k su u parovima $\underline{\text{disjunktni}}$ i $\underline{\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n}$, a zbog tm.33 su svi $Y_k \subseteq X_k$ $\underline{\text{konacni ili prebrojivi}}$ (jer su svi X_k prebrojivi).
[Sada imamo gotovo iste uvjete kao i u slucaju (i) izuzev sigurnosti da su svi Y_k prebrojivi jer su mozda neki ili svi i konacni!. Stoga ne mozemo provesti dokaz onako jednostavno kao pod (i) nego moramo uzeti u obzir tu cinjenicu.]
Dokaz cemo sad provesti pomocu Cantor-Bernstein teorema22 i to tako da cemo najprije pokazati da vrijedi $k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \aleph_0$ i $\aleph_0 \leq k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)$.
Definirajmo stoga $f : \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kao pod (i) tj $f(y) = (n, f_n(y))$ gdje sve $f_n : Y_n \longrightarrow \mathbb{N}$ ovaj put ne mogu biti bijekcije jer kako rekosmo ne moraju svi Y_n biti prebrojivi, ali su barem sve injekcije. No i f je onda injekcija pa je zbog propoz.19$\underbrace{k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)}_{=k(\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n)} \leq \underbrace{k(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}_{=\aleph_0}$ pa imamo $\underline{k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \leq \aleph_0}$.
Kako je $Y_1 \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ to postoji inkluzija $i : Y_1 \longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, $i(y) = y$. Kako je svaka inkluzija injekcija, to po propoz.19 slijedi $kY_1 \leq \underbrace{k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)}_{=k(\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n)}$, a kako je $kY_1 = kX_1 = \aleph_0$, to je onda $\underline{\aleph_0 \leq k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)}$.
Dakle iz potcrtanog, prema $\overline{\text{Cantor-Bernstein}}$ teoremu 22 slijedi $k\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \aleph_0$ tj tvrdnja teorema je istinita. ■

Proposition 41 *Skupovi $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva i $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva su prebrojivi.*

Proof. Pokazimo da je skup $\mathbb{Z}$ prebrojiv:
Skup $\mathbb{Z}$ mozemo prikazati kao $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ gdje je $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow (-\mathbb{N})$ definirana sa $f(n) = -n$ je bijekcija pa je prema Nap.11 $-\mathbb{N}$ prebrojiv skup tj $k(-\mathbb{N}) = \aleph_0$. No prema Nap.12 je $-\mathbb{N}$ i beskonacan, pa je zbog tm.35 $k(-\mathbb{N} \cup \{0\}) = k(-\mathbb{N}) = \aleph_0$ tj skup $(-\mathbb{N} \cup \{0\})$ je prebrojiv. Sada je $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N} \cup \{0\}) \cup \mathbb{N}$ pa je $\mathbb{Z}$ kao unija dva prebrojiva skupa prema kor.36 prebrojiv skup.

Pokazimo da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv:
Prikazimo $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ gdje smo sa $\mathbb{Q}^-$ oznacili negativne a sa $\mathbb{Q}^+$ pozitivne racionalne brojeve.Funkcija $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^-$ definirana s $f(q) = -q$ je bijekcija pa je $\underline{k\mathbb{Q}^+ = k\mathbb{Q}^-}$. Nadalje jer je $\mathbb{Q}^+ \supseteq \mathbb{N}$, a $\mathbb{N}$ je beskonacan prema Nap. 12, zbog teorema26 je onda i $\mathbb{Q}^+$ beskonacan, pa zbog tm.35 vrijedi $\underline{k(\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}) = k\mathbb{Q}^+}$.
Ocito je dovoljno pokazati da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv skup, jer bi tada imali da je i $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ prebrojiv skup, pa bi $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup (\{0\} \cup \mathbb{Q}^+)$ kao unija dva prebrojiva skupa prema kor.36 bio takodjer prebrojiv.
Pokazimo dakle da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv tj da je $k\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$. To cemo pokazati koristeci se Cantor-Bernstein teoremom 22 , pa najprije trebamo pokazati da vrijedi: $k\mathbb{Q}^+ \leq \aleph_0$ & $\aleph_0 \leq k\mathbb{Q}^+$. Jer se svaki $q \in \mathbb{Q}^+$ moze prikazati u obliku $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, i to na jedinstveni nacin ukoliko su m, n relativno prosti, to mozemo definirati funkciju $g : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $g\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n)$, koja je injekcija [17], pa

[17] Neka su $\frac{m}{n}, \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}^+$takvi da je $g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{k}{l}\right) \implies (n, m) = (k, l) \implies n = k$ & $m = l$, tj. $\frac{n}{m} = \frac{k}{l}$, pa je g injekcija.

prema propoz.19 $k\mathbb{Q}^+ \leq k(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ =lema 37= $\aleph_0$,tj $\underline{k\mathbb{Q}^+ \leq \aleph_0}$. No $\mathbb{Q}^+ \supseteq \mathbb{N}$ pa postoji inkluzija $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ a kako je svaka inkluzija injekcija, to je zbog propoz.19 $k\mathbb{N} \leq k\mathbb{Q}^+$ tj. $\underline{\aleph_0 \leq k\mathbb{Q}^+}$. Iz potcrtanog zbog Cantor-Bernst. teorema slijedi $k\mathbb{Q}^+ = \aleph_0$, tj $\mathbb{Q}^+$ je prebrojiv skup.
Dakle $\mathbb{Q}$ je prebrojiv. ■

Theorem 42 *Neka je X prebrojiv skup. Tada je skup svih konacnih nizova s elementima iz X prebrojiv skup.*

Proof. Svaki konacan niz s elementima iz X je u stvari uredjena $n-$torka s elementima iz X, tocnije element iz $\Pi_{i=1}^n X_i$ gdje je $\forall i\ X_i = X$. No onda je skup svih konacnih nizova s elementima iz X u stvari $\cup_{n\in\mathbb{N}}(\Pi_{i=1}^n X_i)$ $(\forall_i$ je $X_i = X)$tj skup svih uredjenih $n-$torki s elementima iz X $(\forall n \in \mathbb{N})$.
Treba dakle pokazati da je $\cup_{n\in\mathbb{N}}(\Pi_{i=1}^n X_i)$ $(\forall_i$ je $X_i = X)$ prebrojiv skup.
Najprije prema korolaru 39 je $\Pi_{i=1}^n X_i$ prebrojiv $\forall n$ (jer je svaki $X_i = X$ - prebrojiv). No prema kor.40 je onda $\cup_{n\in\mathbb{N}}(\Pi_{i=1}^n X_i)$ $(\forall_i$ je $X_i = X)$ prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova. ■

Corollary 43 *Neka je X prebrojiv skup. Skup svih konacnih podskupova od X je prebrojiv skup.*

Proof. Oznacimo sa $Y \subseteq F(X)$ skup svih konacnih podskupova od X, a sa Z skup svih konacnih nizova s elementima iz X. Trebamo pokazati da je $kY = \aleph_0$. To cemo ponovo uciniti pomocu Cantor-Bernstein teorema 22. Pokazimo da vrijdi: $kY \leq \aleph_0$ & $\aleph_0 \leq kY$.

Definirajmo preslikavanje $f : Y \longrightarrow Z$ na sljedeci nacin: $f(\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}) = (x_{i_{j_1}}, \ldots, x_{i_{j_n}})$ gdje je $i_{j_1} < i_{j_2} < \cdots < i_{j_n}$ i $\{i_{j_1}, \ldots, i_{j_n}\} = \{i_1, \ldots, i_n\}$. f je injekcija... [Npr. dvoclani skup$\{2,3\} \in Y$ jednak je skupu $\{3,2\} \in Y$, dok niz tj. uredjena dvojka $(2,3) \in Z$ je razlicit od niza $(3,2)$, pa moze se reci da dvoclanih skupova ima manje nego dvoclanih nizova ..a da bismo osigurali injektivnost trebaju nam gornji uvjeti, tj odabrali smo da se npr. skup $\{2,3\} = \{3,2\}$ preslika u niz $(2,3)$, ocito da f nije surjektivno jer npr postoji element $(3,2) \in Z$ u koji se nije preslikao ni jedan element iz Y]... pa vrijedi prema Propoz.19 $kY \leq kZ$, a kako je prema prethodnom teoremu Z prebrojiv tj $kZ = \aleph_0$, to je $\underline{kY \leq \aleph_0}$.

Neka je sada $g : X \longrightarrow Y$ preslikavanje dano sa $g(x_i) = \{x_i\}$. Ovako definirano g je injekcija, pa je zbog Propoz.19 $kX \leq kY$, a jer je X prebrojiv, tj $kX = \aleph_0$, slijedi $\underline{\aleph_0 \leq kY}$.

Prema Cantor-Bernstein teoremu slijedi $kY = \aleph_0$, tj Y je prebrojiv, sto je i tvrdnja teorema. ■

Proposition 44 *Skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva ekvipotentan je proizvoljnom intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$.*

Proof. Definirajmo najprije $\dot{f} : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ formulom $f(x) = \tan\frac{\Pi}{2}x$. f je bijekcija pa je $\mathbb{R} \sim \langle -1, 1\rangle$.

Neka je sada $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljni interval. Definirajmo $g : \langle -1,1\rangle \longrightarrow \langle a,b\rangle$ sa $g(x) = \frac{1}{2}(a-b)x + \frac{1}{2}(a+b)$. Kako vodimo g je linearna funkcija pa je graf od g pravac (vidi sliku) pa je g bijekcija, tj $\langle -1,1\rangle \sim \langle a,b\rangle$.

Zbog tranzitivnosti relacije $\sim$ slijedi: $\mathbb{R} \sim \langle a,b\rangle$. ■

$k\mathbb{R} = c$ (kontinuum)

Corollary 45 $k\langle a,b] = k[a,b\rangle = k[a,b] = c$

Proof. Kako je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, a $\mathbb{N}$ je prebrojiv tj prema Nap.12 i beskonacan, to je prema Tm.26 i $\mathbb{R}$ beskonacan. No onda je prema prethodnoj Propoziciji i (a,b) beskonacan jer je $(a,b) \sim \mathbb{R}$. Kako vrijedi: $[a,b] = \langle a,b\rangle \cup \{a,b\}$ sto je unija beskonacnog i konacnog skupa, prema Tm.35 slijedi da je $k[a,b] = k(\langle a,b\rangle \cup \{a,b\}) = k(a,b) = c$. Nadalje:
$\langle a,b\rangle \subseteq [a,b\rangle \subseteq [a,b]$ i
$\langle a,b\rangle \subseteq \langle a,b] \subseteq [a,b]$ i kako je $k\langle a,b\rangle = k[a,b] = c$; slijedi prema Kor.23 da je $k[a,b\rangle = k\langle a,b] = c$.

Theorem 46 $\mathbb{R}$ *nije prebrojiv.*

Proof. Prema Propoz.44 dovoljno je pokazati da $\langle 0,1\rangle$ nije prebrojiv.

Pretpostavimo suprotno tj da je $\langle 0,1\rangle$ prebrojiv. Tada se prema Nap.11 moze pisati: $\langle 0,1\rangle = \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$.
Svaki element $x \in \langle 0,1\rangle$ moze se zapisati u obliku beskonacnog decimalnog broja: $x = a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ gdje nisu skoro sve decimale a_i jednake 0 (Npr. ne $0,5 = 0,5000\ldots$ nego $0,5 = 0,49999\ldots$). No onda mozemo svaki $x_i \in \langle 0,1\rangle$ zapisati na sljedeci nacin: $x_i = 0,x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\ldots x_{i_n}\ldots$ gdje nisu skoro sve decimale jednake nuli. Mozemo pisati dakle:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 0,\underline{x_{11}}x_{12}x_{13}\ldots x_{1n}\ldots \\
x_2 = 0,x_{21}\underline{x_{22}}x_{23}\ldots x_{2n}\ldots \\
x_3 = 0,x_{31}x_{32}\underline{x_{33}}\ldots x_{3n}\ldots \\
\vdots & \vdots \\
x_n = 0,x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots \underline{x_{nn}}\ldots
\end{array}
$$

Konstrirajmo sada $b \in \langle 0,1\rangle$ na sljedeci nacin:
$b = 0,b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$ ali tako da $\forall i$ je $\underline{b_i \neq x_{ii}}$,0,9$\boxed{?}$.
Ocito je $b \neq x_i\ \forall i$ (jer npr $b \neq x_1$ jer je $b_1 \neq x_{11}$; $b \neq x_2$ jer je $b_2 \neq x_{22}; \ldots$; $b \neq x_n$ jer je $b_n \neq x_{nn}; \ldots$) dakle $b \notin \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\} = \langle 0,1\rangle$ pa smo dobilli kontradikciju s $b \in \langle 0,1\rangle$ jer je tako konstruiran.

Dakle pretpostavka da je $\langle 0,1\rangle$ prebrojiv dovela nas je do kontradikcije pa zakljucujemo da $\langle 0,1\rangle$ nije prebrojiv, a zbog Propoz.44 niti $\mathbb{R}$ nije prebrojiv, sto je i tvrdnja teorema. ■

Corollary 47 $\aleph_0 < c$.

Proof. Zbog Def.23 treba pokazati da je $\aleph_0 \leq c$ & $\aleph_0 \neq c$.
Kako je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ to je zbog Nap.7 $k\mathbb{N} \leq k\mathbb{R}$, tj. $\underline{\aleph_0 \leq c}$. No prema prethodnom Teoremu je $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$ pa je zbog Def.20 $\underline{\aleph_0 \neq c}$. Konacno je zbog Def.23 $\aleph_0 < c$.
■

Prema dosad izlozenom imamo: $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0 < c < \ldots$?

Mozemo se zapitati postoji li neka veza izmedju $\aleph_0$ i c? Definirajmo najprije:

Definition 25 *Neka je $a = kA$, $b = kB$. Tada se a^b definira kao $a^b = kA^B$ gdje je $A^B = \{f \mid f : B \longrightarrow A\}$*[18]

Remark 13 *Prethodna definicija je dobra, tj. ne ovisi o izboru skupova A i B, tj. za neke druge skupove $A' \neq A$ i $B' \neq B$ takve da je $A' \sim A$ i $B' \sim B$ (odnosno $a = kA'$ i $b = kB'$) opet vrijedi da je $a^b = kA'^{B'}$ tj da je $kA^B = kA'^{B'}$ odnosno da je $A'^{B'} \sim A^B$.*

Proof. Treba dokazati da uz gornje uvjete vrijedi $A'^{B'} \sim A^B$. Treba dakle pronaci bijekciju $\varphi : A^B \longrightarrow A'^{B'}$. Kako je $A' \sim A$ i $B' \sim B$ to postoje bijekcije h i g izmedju tih skupova pa imamo sljedecu situaciju:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, "h"'] & A' \end{tikzcd}$$

Definirajmo $\varphi(f) = h \circ f \circ g^{-1}$. Pokazimo da je φ bijekcija:

(i) φ je injekcija: Neka su $f_1, f_2 \in A^B$ takvi za koje vrijedi $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$. Treba dokazati da je onda $f_1 = f_2$.Kako je $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \implies hf_1g^{-1} = hf_2g^{-1} \implies$ zbog asocijativnosti kompozicije (Prop.12) $\implies (hf_1)\, g^{-1} = (hf_2)\, g^{-1} \implies$ jer je g bijekcija, onda je i g^{-1} bijekcija pa posebno i surjekcija to je prema Tm.13 i epimorfizam, pa zbog Def.16 (kracenje s desna) $\implies hf_1 = hf_2 \implies$ jer je h bijekcija, pa posebno i injekcija to je prema Tm.13 i monomorfizam, pa zbog Def.16 (kracenje s lijeva) $\implies f_1 = f_2$. Dakle φ je injekcija.

(ii) φ je surjekcija: Odaberimo proizvoljnu $f' \in A'^{B'}$. Trebamo pronaci $f \in A^B$ za koju je $\varphi(f) = f'$. Kako je $\varphi(f) = h \circ f \circ g^{-1}$ to dakle moramo pronaci tj definirati takvo $f : B \longrightarrow A$ za koju je $h \circ f \circ g^{-1} = f'$. Jednakost funkcija se dokazuje preko djelovanja na isti element ili skup, pa pomazuci se gornjim dijagramom imamo: $\left(h \circ f \circ g^{-1}\right)(B') = (hf)\left(g^{-1}(B')\right)$ =jer je g^{-1} bijekcija $= (hf)(B) = h(f(B))$ i to mora biti $= f'(B')$. Iz posljednje jednakosti zakljucujemo da ona moze vrijediti jedino ako je $\underline{f(B) = h^{-1}(f'(B'))}$. Stavimo dakle to u posljednju jednakost i doista dobijemo: $h\left(h^{-1}(f'(B'))\right) = f'(B)$, sto znaci da smo pronasli $f : B \longrightarrow A$ definirano na potcrtanom dijelu, koje se φ-om preslikalo u proizvoljni $f' \in A'^{B'}$,dakle φ je i surjekcija.

Dakle φ je bijekcija, pa doista uz gore nabrojane uvjete ($A' \neq A$ i $B' \neq B$, $A' \sim A$ i $B' \sim B$) zbog Def.19 vrijedi $A'^{B'} \sim A^B$ tj gornja definicija (uz te uvjete) zaista ne ovisi o izboru skupova A i B. ■

Example 9 $k\{0,1\}^{\mathbb{N}} =$ *prema prethodnoj definiciji* $= k\{0,1\}^{k\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$

[18] Npr. neka je $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$. $A^B = \{f_i \mid f_i : B \longrightarrow A,\ i = 1,\ldots,8\}$ gdje su: $[f_1(1) = f_1(2) = f_1(3) = 1]$; $[f_2(1) = f_2(2) = 1$ a $f_2(3) = 2]$; $[f_3(1) = f_3(3) = 1$ a $f_3(2) = 2]$; $[f_4(2) = f_4(3) = 1$ a $f_4(1) = 2]$; $[f_5(1) = f_5(2) = f_5(3) = 2]$; $[f_6(1) = f_6(2) = 2$ a $f_6(3) = 1]$; $[f_7(1) = f_7(3) = 2$ a $f_7(2) = 1]$; $[f_8(2) = f_8(3) = 2$ a $f_8(1) = 1]$; sve moguce funkcije : $B \longrightarrow A$.

Theorem 48 $c = 2^{\aleph_0}$.

Proof. Koristit cemo Cantor-Bernstein Tm.22. Trebamo dakle najprije pokazati da vrijedi: $c \leq 2^{\aleph_0}$ & $2^{\aleph_0} \leq c$.

Prema Tm.31 je $k2^{\mathbb{Q}} = kF(\mathbb{Q})$. Kako je prema posljednjoj definiciji $k2^{\mathbb{Q}} = (k2)^{k\mathbb{Q}} = 2^{\aleph_0}$, to imamo: $kF(\mathbb{Q}) = 2^{\aleph_0}$. Sad kad smo uspostavili tu jednakost, te uzevsi u obzir da je $k\mathbb{R} = c$, mozemo trazenu nejednakost $c \leq 2^{\aleph_0}$ dobiti preko $c \leq kF(\mathbb{Q})$ a potonju cemo dobiti pronadjemo li injekciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow F(\mathbb{Q})$ te iskoristimo Prop.19. Definirajmo zato $f(x) = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\} \in F(\mathbb{Q})$. Pokazimo da je ovako definirano f injekcija:
Neka su $x, x' \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \neq x'$. Trebamo pokazati da je onda i $f(x) \neq f(x')$. Bez smanjenja opcenitosti mozemo pretpostaviti da je $x < x'$. Kako je skup $\mathbb{Q}$ *gust* u $\mathbb{R}$ i $x \neq x'$ to postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < q < x'$. No tada prema definiciji funkcije f imamo $q \in f(x')$ & $q \notin f(x)$, gdje su $f(x'), f(x) \in F(\mathbb{Q})$, odnosno $f(x')$ i $f(x)$ su poskupovi skupa $\mathbb{Q}$ koji se razlikuju u barem jednom elementu, pa prema Aksiomu ekstenzionalnosti (1) zakljucujemo da je $f(x') \neq f(x)$. Dakle f je injekcija pa prema Prop.19 slijedi $c \leq kF(\mathbb{Q})$ odnosno $\underline{c \leq 2^{\aleph_0}}$.

Sada trebamo pokazati da je $2^{\aleph_0} \leq c$. Opet cemo koristiti Prop.19, stoga trebamo uspostaviti injekciju $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1\rangle$. Neka je $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Definirajmo: $g(f) = 0, f(1) f(2) \ldots f(n) \ldots$. Pokazimo da je ovako definirano g injekcija: Neka su $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ takvi da je $g(f_1) = g(f_2)$. Trebamo pokazati da je onda i $f_1 = f_2$. Kako je $g(f_1) = g(f_2) \implies 0, f_1(1) \ldots f_1(n) \ldots = 0, f_2(1) \ldots f_2(n) \ldots \implies f_1(i) = f_2(i)\ \forall i \in \mathbb{N} \implies f_1 = f_2$. Dakle g je injekcija pa prema Prop.19 slijedi $\underline{2^{\aleph_0} \leq c}$.

Iz potcrtanog, prema Cantor-Bernstein Tm.22 slijedi $c = 2^{\aleph_0}$. ■

Neka je X proizvoljan beskonacan podskup od $\mathbb{R}$. Kako je X beskonacan to prema Tm.30 posotji injekcija : $\mathbb{N} \longrightarrow X$. No onda prema Prop.19 slijedi da je $k\mathbb{N} \leq kX$ odnosno $\aleph_0 \leq kX$. Nadalje kako je $X \subseteq \mathbb{R}$ to prema Nap.7 znaci da je $kX \leq k\mathbb{R}$ odnosno $kX \leq c$.No onda prema Prop.20 imamo da je $\aleph_0 \leq c$ tj $\underline{\aleph_0 \leq kX \leq c}$.

Interesantno je zapitati se postoji li takav skup $X \subseteq \mathbb{R}$ za koji bi vrijedilo $\aleph_0 < kX < c = 2^{\aleph_0}$(Hilbertov problem!).

HIPOTEZA KONTINUUMA: Takav skup ne postoji.

1963. Paul Cohen rijesio je problem: Odgovor je da i ne. Naime postoje dvije teorije skupova : ona koja podrzava i ona koja ne podrzava tvrdnju.

Goedel : dao dio dokaza ali ne cijeli.

Aritmetika kardinalnih brojeva

Definition 26 *Neka su a i b kardinalni brojevi , a A i B skupovi takvi da vrijedi: $a = kA$ i $b = kB$. Tada definiramo:*

1) Ako su A i B disjunktni: $a + b = k(A \cup B)$;

2) $a \cdot b = k(A \times B)$;

3) $a^b = k\left(A^B\right)$

Remark 14 *Uvjet u 1) uvijek se moze postici: Npr. neka je* $A = \langle a, b\rangle$ *i* $B = \langle c, d\rangle$ *pri cemu je* $a < c < b < d$ *(tj* A *i* B *nisu disjunktni), imamo:*
$A \times \{1\} \sim A$ *tj* $kA = k(A \times \{1\}) = a$
$B \times \{2\} \sim B$ *tj* $kB = k(B \times \{2\}) = b$

Remark 15 *Definicija ne ovisi o izboru reprezentanata: Neka npr. imamo:* $A \cap B = \emptyset$ *i* $A' \cap B' = \emptyset$ *pri cemu je* $A \sim A'$ *te* $B \sim B'$ *tj postoje bijekcije* $f : A \longrightarrow A'$ *i* $g : B \longrightarrow B'$*. Tada je* $A \cup B \sim A' \sim B'$*, te* $A \times B \sim A' \times B'$ *jer postoje preslikavanja* $h : A \cup B \longrightarrow A' \sim B'$ *i* $\varphi : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ *gdje je* $h(x) = \{^{f(x),\ x \in A}_{g(x),\ x \in B}$ *i* $\varphi(a, b) = (f(a), g(b))$ *koji su bijekcije.*

Theorem 49 *Neka su* a, b, c *proizvoljni kardinalni brojevi (Postoje skupovi* A, B, C *t. da je* $kA = A$*,* $kB = b$*,* $kC = c$*). Tada ne oviseci o izboru reprezentanata kako je gore pokazano je:*

1) $a + b = b + a$
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$
3) $a \cdot b = b \cdot a$
4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
6) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
7) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
8) $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$

Proof. 1) Neka su A, B, C takvi da vrijedi $kA = a$, $kB = b$, $kC = c$ i A, B, C su medjusobno u parovima disjunktni (takve reprezentante uvijek mozemo naci kako je pokazano u Nap.14). Prema Def.26 imamo:
$a + b = k(A \cup B)$
$b + a = k(B \cup A)$.
Kako zbog refleksivnosti relacije $=$ (Def.13) slijedi da je $k(A \cup B)$ u relaciji $=$ sa samim sobom, to zbog komutativnosti unije[19] ($A \cup B = B \cup A$) imamo:
$k(A \cup B) = k\underbrace{(A \cup B)}_{=B \cup A} \Longrightarrow k(A \cup B) = k(B \cup A) \Longrightarrow a + b = b + a.$

2) Neka su A, B, C takvi da vrijedi $kA = a$, $kB = b$, $kC = c$ i A, B, C su medjusobno u parovima disjunktni (takve reprezentante uvijek mozemo naci kako je pokazano u Nap.14).Prema Def.26 imamo:
$b + c = k(B \cup C)$; $a + (b + c) = kA + k(B \cup C) = k(A \cup (B \cup C))$
$a + b = k(A \cup B)$; $(a + b) + c = k(A \cup B) + kC = k((A \cup B) \cup C)$
Kako zbog refleksivnosti relacije $=$ (Def.13) slijedi da je $k(A \cup (B \cup C))$ u relaciji $=$ sa samim sobom, to zbog asocijativnosti unije[20] $(A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$ imamo:
$k(A \cup (B \cup C)) = k\underbrace{(A \cup (B \cup C))}_{=(A \cup B) \cup C} \Longrightarrow k(A \cup (B \cup C)) = k((A \cup B) \cup C) \Longrightarrow$
$a + (b + c) = (a + b) + c.$

[19] Komutativnost unije proizlazi iz Axioma unije ?? i Axioma rasprostranjenosti ??
[20] Asocijativnost unije proizlazi iz Axioma unije ?? i Axioma rasprostranjenosti ??

3) Prema Def.26 je:
$a \cdot b = k\,(A \times B)$
$b \cdot a = k\,(B \times A)$
Trebamo dakle dokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva. To prema Def.20 znaci da treba pokazati da su skupovi $A \times B$ i $B \times A$ ekvipotentni, a zbog Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $f : A \times B \longrightarrow B \times A$. Definirajmo stoga $f\,(a, b) = (b, a)\,.$ Lako se pokaze da je ovako definirano f bijekcija, dakle doista je $k\,(A \times B) = k\,(B \times A)$ odnosno: $a \cdot b = b \cdot a$.

4) Prema Def.26 je:
$b \cdot c = k\,(B \times C)\,;\; a \cdot (b \cdot c) = kA \cdot k\,(B \times C) = k\,(A \times (B \times C))$
$a \cdot b = k\,(A \times B)\,;\; (a \cdot b) \cdot c = k\,(A \times B) \cdot kC = k\,((A \times B) \times C)$
Trebamo dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva: $k\,(A \times (B \times C))$ i $k\,((A \times B) \times C)\,.$ To prema Def.20 znaci da treba pokazati da su skupovi $A \times (B \times C)$ i $(A \times B) \times C$ ekvipotentni, a zbog Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $f : A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C$. Definirajmo stoga $f\,(a, (b, c)) = ((a, b)\,, c)\,.$ Pokazimo da je ovako definirano f bijekcija:

Injekcija: Neka za $(a_1, (b_1, c_1))$ i $(a_2, (b_2, c_2)) \in A \times (B \times C)$ vrijedi da je $f\,(a_1, (b_1, c_1)) = f\,(a_2, (b_2, c_2))\,.$ Treba pokazati da je onda $(a_1, (b_1, c_1)) = (a_2, (b_2, c_2))\,.$
Kako je $f\,(a_1, (b_1, c_1)) = f\,(a_2, (b_2, c_2)) \implies ((a_1, b_1)\,, c_1) = ((a_2, b_2)\,, c_2) \implies (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \;\&\; c_1 = c_2 \implies a_1 = a_2 \;\&\; b_1 = b_2 \;\&\; c_1 = c_2 \implies a_1 = a_2 \;\&\; (b_1, c_1) = (b_2, c_2) \implies (a_1, (b_1, c_1)) = (a_2, (b_2, c_2))\,.$ Dakle f je injekcija.

Surjekcija: Odaberimo proizvoljni $((a, b)\,, c) \in (A \times B) \times C$. Trebamo pronaci $(x, (y, z)) \in A \times (B \times C)$ takav da je $f\,(x, (y, z)) = ((a, b)\,, c)\,.$
Kako je $f\,(x, (y, z)) = ((x, y)\,, z)\,,$ to onda imamo da treba biti: $((x, y)\,, z) = ((a, b)\,, c)$ a to vrijedi ako je $(x, y) = (a, b) \;\&\; z = c$, odnosno ako je $x = a \;\&\; y = b \;\&\; z = c$. Dakle pronasli smo element $(x, (y, z)) = (a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ koji je f preslikao u proizvoljno odabrani $((a, b)\,, c) \in (A \times B) \times C$. Dakle f je surjekcija.

Dakle f je bijekcija pa je doista $k\,(A \times (B \times C)) = k\,((A \times B) \times C)$ odnosno $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

5) Da bismo mogli primijeniti Def.26 mora biti $B \cap C = \emptyset$. Tada je zbog iste definicije:
a) $b + c = k\,(B \cup C)\,;\; a \cdot (b + c) = kA \cdot k\,(B \cup C) = k\,(A \times (B \cup C))$
b) $a \cdot b + a \cdot c = k\,(A \times B) + k\,(A \times C) = k\,((A \times B) \cup (A \times C))$ uz uvjet da je $A \times B \cap A \times C = \emptyset$.

Trebamo dakle pokazati jednakost kardinalnih brojeva $k\,(A \times (B \cup C))$ i $k\,((A \times B) \cup (A \times C))\,.$ Prema Def.20 dovoljno je pokazati da je $\underline{A \times (B \cup C) \sim (A \times B) \cup (A \times C)}$:

Kako zbog refleksivnosti (Def.13) relacije $\sim$ slijedi da je $A \times \overline{(B \cup C)}$ u relaciji $\sim$ sa samim sobom, to zbog poznate jednakosti $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$[21] imamo: $A \times (B \cup C) \sim \underbrace{A \times (B \cup C)}_{=(A \times B) \cup (A \times C)} = (A \times B) \cup (A \times C)\,,$ tj

[21] Dokazimo to: Neka je $(a, x) \in A \times (B \cup C) \iff a \in A \;\&\; x \in (B \cup C) \iff a \in A \;\&\; (x \in B$ ili $x \in C) \iff (a \in A \;\&\; x \in B)$ ili $(a \in A \;\&\; x \in C) \iff (a, x) \in A \times B$ ili $(a, x) \in$

skupovi $A\times(B\cup C)$ i $(A\times B)\cup(A\times C)$ su ekvipotentni, pa prema Def.20 doista vrijedi: $\underline{k(A\times(B\cup C))=k((A\times B)\cup(A\times C))}$...

[Ako bismo sada imali ispunjen uvjet da je $(A\times B)\cap(A\times C)=\emptyset$ tvrdnja 5) bi bila dokazana. Pokazimo stoga najprije da uvjet $B\cap C=\emptyset$ povlaci $(A\times B)\cap(A\times C)=\emptyset$. Pretpostavimo suprotno tj neka $\exists(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$. Tada je $(x,y)\in A\times B\ \&\ (x,y)\in A\times C\implies x\in A\ \&\ \underline{y\in B}\ \&\ x\in A\ \&\ \underline{y\in C}$ sto je kontradikcija s $B\cap C=\emptyset$. Dakle doista je $(A\times B)\cap(A\times C)=\emptyset$.]

...Iz potcrtanog, zbog a) i b), konacno imamo da je $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

6) Da bismo mogli primijeniti Def.26 mora biti $B\cap C=\emptyset$. Tada je zbog iste definicije:

$a^{b+c}=k\left(A^{B\cup C}\right)$

$a^b\cdot a^c=k\left(A^B\right)\cdot k\left(A^C\right)=k\left(A^B\times A^C\right)$

Trebamo dakle pokazati jednakost kardinalnih brojeva $k\left(A^{B\cup C}\right)$ i $k\left(A^B\times A^C\right)$ .To prema Def.20 znaci da treba pokazati da je $A^{B\cup C}\sim A^B\times A^C$, a zbog Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $\underline{\Phi:A^{B\cup C}\longrightarrow A^B\times A^C}$.Definirajmo stoga $\underline{\Phi(f)=(f\mid_B,f\mid_C)}$. Pokazimo da je ovako definirano f bijekcija:

Injekcija: Neka za proizvoljne $f_1,\ f_2\in A^{B\cup C}$ vrijedi da je $\Phi(f_1)=\Phi(f_2)$. Treba dokazati da je onda i $f_1=f_2$. Kako je $\Phi(f_1)=\Phi(f_2)$, to slijedi: $(f_1\mid_B,f_1\mid_C)=(f_2\mid_B,f_2\mid_C)\implies(f_1\mid_B=f_2\mid_B)\ \&\ (f_1\mid_C=f_2\mid_C)\implies f_1(x)=f_2(x)\ \forall x\in B\cup C$, pa je Φ injekcija.

Surjekcija: Odaberimo proizvoljni $(h,g)\in A^B\times A^C$ $(h:B\longrightarrow A,g:C\longrightarrow A)$. Trebamo pronaci (tj definirati) funkciju $f\in A^{B\cup C}$ takvu da je $\Phi(f)=(h,g)$. Dakle $\Phi(f)=(f\mid_B,f\mid_C)$ mora biti $=(h,g)\implies f\mid_B=h\ \&\ f\mid_C=g$. Dakle definiramo li $f:B\cup C\longrightarrow A$ sa $f(x)=\left\{\begin{smallmatrix}h(x), & x\in B\\ g(x), & x\in C\end{smallmatrix}\right.$ (imamo otprije uvjet $B\cap C=\emptyset$) tada cemo imati da je $\Phi(f)=(f\mid_B,f\mid_C)=(h,g)$. Dakle za proizvoljni $(h,g)\in A^B\times A^C$ pronasli smo $f\in A^{B\cup C}$ koji se preslikao u njega, sto znaci da je Φ surjekcija.

Dakle Φ je bijekcija pa doista vrijedi: $k\left(A^{B\cup C}\right)=k\left(A^B\times A^C\right)$ odnosno $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$

7) Prema Def.26 je:

$a\cdot b=k(A\times B)\,;\,(a\cdot b)^c=k(A\times B)^{kC}=k\left((A\times B)^C\right)$

$a^c=k\left(A^C\right);\,b^c=k\left(B^C\right);\ a^c\cdot b^c=k\left(A^C\right)\cdot k\left(B^C\right)=k\left(A^C\times B^C\right)$

Trebamo dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva: $k\left((A\times B)^C\right)$ i $k\left(A^C\times B^C\right)$. To prema Def.20 znaci da treba pokazati da su skupovi $(A\times B)^C$ i $A^C\times B^C$ ekvipotentni, a zbog Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $\Phi:A^C\times B^C\longrightarrow(A\times B)^C$. Definirajmo stoga $\Phi(f,g)=h$ gdje je $f:C\longrightarrow A$, $g:C\longrightarrow B$; $h=\Phi(f,g):C\longrightarrow(A\times B)$ gdje je $\underline{h(c)=(\Phi(f,g))(c)=(f(c),g(c))}\in A\times B$. Pokazimo da je ovako definirano Φ bijekcija:

Injekcija: Neka su $(f_1,g_1),(f_2,g_2)\in A^C\times B^C$ takvi da je $\Phi(f_1,g_1)=\Phi(f_2,g_2)$. Treba pokazati da je onda $(f_1,g_1)=(f_2,g_2)$. Kako je $\Phi(f_1,g_1)=\Phi(f_2,g_2)$ to znaci da te dvije funkcije jednako djeluju na elementu domene pa mora biti $(\Phi(f_1,g_1))(c)=(\Phi(f_2,g_2))(c)\implies(f_1(c),g_1(c))=(f_2(c),g_2(c))\implies$

$A\times C\iff(a,x)\in((A\times B)\cup(A\times C))$. Dakle doista je $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

$f_1(c) = f_2(c)$ & $g_1(c) = g_2(c) \implies f_1 = f_2$ & $g_1 = g_2 \implies (f_1, g_1) = (f_2, g_2)$ dakle Φ je injekcija.

Surjekcija: Odaberimo proizvoljni $h \in (A \times B)^C$, to znaci da je za $c \in C$, $h(c) = (a, b)$. Trebamo pronaci $(f, g) \in A^C \times B^C$ za koje je $\Phi(f, g) = h$. Kako je $(\Phi(f, g))(c) = (f(c), g(c))$ i kako je $h(c) = (a, b)$, da bismo imali $\Phi(f, g) = h$ trebaju f i g biti definirane na slejdeci nacin: $f(c) = a$, $g(c) = b$. Uz tako definirane f i g se (f, g) preslikao Φ-om u proizvoljni h pa je Φ surjekcija.

Dakle Φ je bijekcija pa je doista $k\left((A \times B)^C\right) = k\left(A^C \times B^C\right)$ odnosno $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

8) Prema Def.26 je:
$a^b = k\left(A^B\right)$; $\left(a^b\right)^c = k\left(\left(A^B\right)^C\right)$
$b \cdot c = k(B \times C)$; $a^{b \cdot c} = k\left(A^{B \times C}\right)$
Trebamo dakle pokazati jednakost kardinalnih brojeva $k\left(\left(A^B\right)^C\right)$ i $k\left(A^{B \times C}\right)$.
To prema Def.20 znaci da treba pokazati da je $\left(A^B\right)^C \sim A^{B \times C}$, a zbog Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $\Phi : \left(A^B\right)^C \longrightarrow A^{B \times C}$. Definirajmo stoga: $\Phi(f) = h$, [gdje je $f : C \longrightarrow A^B$, $h : B \times C \longrightarrow A$, i kako je $\forall c \in C$, $f(c) \in A^B$,to je $f(c) : B \longrightarrow A$] tako da je $\underline{h(b, c) = (\Phi(f))(b, c) = (f(c))(b)}$. Pokazimo da je Φ bijekcija:

Injekcija: Neka su $f_1, f_2 \in \left(A^B\right)^C$ takvi da je $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$. Trebamo pokazati da je onda $f_1 = f_2$. Kako je $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$ to znaci da te dvije funkcije jednako djeluju na elementu domene pa mora biti $(\Phi(f_1))(b, c) = (\Phi(f_2))(b, c) \implies (f_1(c))(b) = (f_2(c))(b) \implies f_1(c) = f_2(c) \implies f_1 = f_2$, dakle Φ je injekcija.[22]

Surjekcija: Odaberimo proizvoljno $h \in A^{B \times C}$. Trebamo pronaci $f \in \left(A^B\right)^C$ takvo da je $\Phi(f) = h$. Posljednju jednakost imat cemo ako $\Phi(f)$ i h jednako djeluju na elementu domene tj ako je $(\Phi(f))(b, c) = h(b, c)$. No kako je $(\Phi(f))(b, c) = (f(c))(b)$ to treba biti $(f(c))(b) = h(b, c)$. Dakle $f \in \left(A^B\right)^C$ za koje ce vrijediti $\Phi(f) = h$ je ono preslikavanje za koje vrijedi $(f(c))(b) = h(b, c)$, jer tada imamo $(\Phi(f))(b, c) = (f(c))(b) = h(b, c) \implies \Phi(f) = h$ sto znaci da je Φ surjekcija.

Dakle Φ je bijekcija, pa je doista $k\left(\left(A^B\right)^C\right) = k\left(A^{B \times C}\right)$ odnosno: $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$. ■

Corollary 50 *Neka je a proizvoljni kardinalni broj. Tada vrijedi:*
1) $a + 0 = a$; *2)* $1 \cdot a = a$; *3)* $0 \cdot a = 0$; *4)* $a^1 = a$; *5)* $1^a = 1$.

Proof. Neka je A skup takav da je $a = kA$. Kako je $k\emptyset = 0$, i $k\{\emptyset\} = 1$ imamo:

[22] Dokazimo na drugi nacin injektivnost: Neka su $f_1, f_2 \in \left(A^B\right)^C$ takvi da je $f_1 \neq f_2$. Trebamo pokazati da je onda i $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$. Kako je $f_1 \neq f_2$ to znaci da $\exists c_0 \in C$ t. da je $f_1(c_0) \neq f_2(c_0)$, no kako su sada $f_1(c_0), f_2(c_0) \in A^B$ i razlicite su, to $\exists b_0 \in B$ t. da je $(f_1(c_0))(b_0) \neq (f_2(c_0))(b_0)$. Sada imamo $\underline{(\Phi(f_1))(b_0, c_0)} = (f_1(c_0))(b_0) \underline{\neq} (f_2(c_0))(b_0) = \underline{(\Phi(f_2))(b_0, c_0)}$ tj. $\Phi(f_1) \neq \Phi(f_2)$, pa je Φ injekcija.

1) Prema Def.26 je:
$a+0=k(A\cup\emptyset)$; $a=kA$;
Trebamo dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva $k(A\cup\emptyset)$ i kA. Prema Def.20 dovoljno je pokazati da je $A\cup\emptyset\sim A$. Kako je prema Axiomu unije (6) $A\cup\emptyset=A$ onda je i $A\cup\emptyset\sim A$, pa je dakle $k(A\cup\emptyset)=kA$, odnosno $a+0=a$.

2) Prema Def.26 je:
$1\cdot a=k(\{\emptyset\}\times A)$; $a=kA$;
Trebamo dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva: $k(\{\emptyset\}\times A)$ i kA. To prema Def.20 znaci da treba pokazati da je $\{\emptyset\}\times A\sim A$, a prema Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $f:\{\emptyset\}\times A\longrightarrow A$. Definirajmo stoga $f(\emptyset,a)=a$. Lako se pokaze da je ovako definirano f bijekcija, pa je doista $k(\{\emptyset\}\times A)=kA$, odnosno $1\cdot a=a$.

3) Prema Def.26 je:
$0\cdot a=k(\emptyset\times A)$; $0=k\emptyset$
Treba dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva: $k(\emptyset\times A)$ i $k\emptyset$. Prema Def.20 dovoljno je pokazati da je $\emptyset\times A\sim\emptyset$.Kako je prema (4) $\emptyset\times A=\emptyset$ (jer je prema Ax.2 $x\notin\emptyset\ \forall x$) onda je i $\emptyset\times A\sim\emptyset$, pa je $k(\emptyset\times A)=k\emptyset$ odnosno $0\cdot a=0$.

4) Prema Def.26 je:
$a^1=k\left(A^{\{\emptyset\}}\right)$; $a=kA$.
Treba dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva $k\left(A^{\{\emptyset\}}\right)$ i kA. Prema Def.20 to znaci da treba pokazati da je $A^{\{\emptyset\}}\sim A$, a prema Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $\Phi:A^{\{\emptyset\}}\longrightarrow A$. Definirajmo stoga $\Phi(f)=f(\emptyset)$. Pokazimo da je ovako definirano Φ bijekcija:

Injekcija: Neka su $f_1,f_2\in A^{\{\emptyset\}}$ takvi da je $\Phi(f_1)=\Phi(f_2)$. Treba pokazati da je onda $f_1=f_2$. Kako je $\Phi(f_1)=\Phi(f_2)$ to je onda $f_1(\emptyset)=f_2(\emptyset)\implies f_1=f_2$, pa je Φ injekcija.

Surjekcija: Odaberimo proizvoljni $a\in A$. Trebamo pronaci $f\in A^{\{\emptyset\}}$ t. da je $\Phi(f)=a$. Kako je $\Phi(f)=f(\emptyset)$ to bi moralo biti $f(\emptyset)=a$. Dakle pronasli smo $f\in A^{\{\emptyset\}}$ definirano sa $f(\emptyset)=a$, koje ce Φ preslikati u proizvoljni $a\in A$, pa je Φ surjekcija.

Dakle Φ je bijekcija pa je doista $k\left(A^{\{\emptyset\}}\right)=kA$ odnosno $a^1=a$.

5)Prema Def.26 je:
$1^a=k\left(\{\emptyset\}^A\right)$; $1=k\{\emptyset\}$
Treba dakle pokazati jednakost dvaju kardinalnih brojeva $k\left(\{\emptyset\}^A\right)$ i $k\{\emptyset\}$. To prema Def.20 znaci da treba pokazati da je $\{\emptyset\}^A\sim\{\emptyset\}$, a prema Def.19 dovoljno je pronaci bijekciju $\Phi:\{\emptyset\}^A\longrightarrow\{\emptyset\}$. Definirajmo stoga $\Phi(f)=\emptyset$.Kako je $\{\emptyset\}^A=\{f\mid f:A\longrightarrow\{\emptyset\}\}=\{f\}$ tj jednoclan skup, ocigledno je Φ bijekcija, pa je doista $k\left(\{\emptyset\}^A\right)=k\{\emptyset\}$ odnosno $1^a=1$. ■

Corollary 51 *Neka je λ proizvoljni beskonacni kardinal tj $\lambda=kA$ i A beskonacan. Tada uz $n=kA_n$ i $c=k\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ vrijedi:*
1) a)$\lambda+n=\lambda$; b) $\lambda+\aleph_0=\lambda$
2) a)$\aleph_0\cdot n=\aleph_0$; b) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
3) a)$c\cdot c=c$; b) $c^n=c$; $\forall n\in\mathbb{N}$.

Proof. 1) a)Prema Def.26 i Nap.14 je
$\lambda+n = k(A \cup A_n)$ gdje je A beskonacan i A_n konacan (Tm.27) pa prema Tm.35 izlazi da je $k(A \cup A_n) = kA$ odnosno $\lambda + n = \lambda$.

b) Isto tako je prema Def.26 i Nap.14 je:
$\lambda + \aleph_0 = k(A \cup \mathbb{N})$ gdje je A beskonacan i $\mathbb{N}$ prebrojiv, pa prema Tm.35 izlazi da je $k(A \cup \mathbb{N}) = kA$, odnosno $\lambda + \aleph_0 = \lambda$.

2) a) $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 \cdot \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n-puta}$ = (Tm.49, svojstvo 5))= $\underbrace{\aleph \cdot 1 + \cdots + \aleph_0 \cdot 1}_{n-puta}$ =(Kor.50)= $\underbrace{\aleph_0 + \cdots + \aleph_0}_{n-puta}$ = (Def.26)= $k\underbrace{(\mathbb{N} \cup \cdots \cup \mathbb{N})}_{n-puta}$. No prema Kor.36 je $\underbrace{(\mathbb{N} \cup \cdots \cup \mathbb{N})}_{n-puta}$ prebrojiv skup pa je $k\underbrace{(\mathbb{N} \cup \cdots \cup \mathbb{N})}_{n-puta} = \aleph_0$

b) $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ =(Def.26)= $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. No prema Lemi 37 je $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \aleph_0$, pa je doista $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

3) a) $c \cdot c$ =(Tm.48)= $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}$ =(Tm.49 svojstvo 6))= $2^{\aleph_0 + \aleph_0}$ =(Def.26)= $2^{k(\mathbb{N} \cup \mathbb{N})}$. No prema Kor.36 je $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ je prebrojiv skup pa je $k(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}) = \aleph_0$. Pa je $2^{k(\mathbb{N} \cup \mathbb{N})} = 2^{\aleph_0} = c$.

b) Ovu tvrdnju dokazimo indukcijom:
Baza: $n = 1$: c^1 =(Kor.50 svojstvo 4))= c.
Pp. $n = k$: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi $\forall k$, $1 \leq k \leq n$, tj neka vrijedi: $c^k = c$
$n = k + 1$: Dokazimo da tvrdnja vrijedi za $k + 1$: c^{k+1} =(Tm.49 svojstvo 6))= $c^k \cdot c^1$ =(prema Bazi indukcije)= $c^k \cdot c$ =(prema Pp indukcije)= $c \cdot c$ =(prema svojstvu 3))= c.
Dakle prema Tm.4 i Napomeni nakon njega, slijedi da je tvrdnja tocna $\forall n \in \mathbb{N}$.
■

Theorem 52 *Neka su a, b, c proizvoljni kardinalni brojevi. Ako vrijedi $a \leq b$ onda vrijedi:*
1) $a + c \leq b + c$
2) $a \cdot c \leq b \cdot c$
3) $a^c \leq b^c$
4) $c^a \leq c^b$

Teorem mozemo slobodnim rijecima izreci ovako: Zbrajanje, mnozenje i potenciranje kardinala cuva uredjaj.
Proof. Neka je $a = kA$, $b = kB$, $c = kC$, te neka je za potrebe 1) relacije $A \cap C = \emptyset = B \cap C$. Po pretpostavci je $a \leq b$, a to prema Propoz.19 znaci da postoji injekcija $f : A \longrightarrow B$.

1) Prema Def.26 je $a + c = k(A \cup C)$; $b + c = k(B \cup C)$. Trebamo dakle pokazati da je $k(A \cup C) \leq k(B \cup C)$. Prema Propoz.19 dovoljno je pronaci injekciju $\Phi : A \cup C \longrightarrow B \cup C$. Definirajmo stoga $\Phi(x) = \{^{f(x),\ x \in A}_{x,\ x \in C}$. Ovako definirano Φ je injekcija jer je f po Pp injekcija, i $id_C : C \longrightarrow C$ je injekcija a vrijedi takodjer $A \cap C = \emptyset = B \cap C$.

2) Prema Def.26 je $a \cdot c = k(A \times C)$; $b \cdot c = k(B \times C)$. Trebamo dakle pokazati da je $k(A \times C) \leq k(B \times C)$. Prema Propoz.19 dovoljno je pronaci

injekciju $\Phi : A \times C \longrightarrow B \times C$. Definirajmo stoga $\Phi(a,c) = (f(a), c)$. Ovako definirano Φ je injekcija jer je f injekcija tj uredjeni parovi $(f(a), c)$ ce biti razliciti za razlicite (a,c) jer ce su uvijek razlikovati barem na prvoj koordinati.

3)Prema Def.26 je $a^c = k(A^C)$; $b^c = k(B^C)$. Trebamo dakle pokazati da je $k(A^C) \leq k(B^C)$. Prema Propoz.19 dovoljno je pronaci injekciju $\Phi : A^C \longrightarrow B^C$. Definirajmo stoga: $\Phi(g) = f \circ g \in B^C$.
Dokazimo da je Φ injekcija: Neka za neke $g_1, g_2 \in A^C$ vrijedi da je $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$. Trebamo pokazati da je onda $g_1 = g_2$. Kako je $\Phi(g_1) = \Phi(g_2) \implies f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies$ (jer je f injekcija pa prema Tm.13 i monomorfizam tj prema Def.16mozemo "kratiti s lijeva") $\implies g_1 = g_2$.

4)Prema Def.26 je $c^a = k(C^A)$; $c^b = k(C^B)$. Trebamo dakle pokazati da je $k(C^A) \leq k(C^B)$. Prema Propoz.19 dovoljno je pronaci injekciju $\Phi : C^A \longrightarrow C^B$. Definirajmo stoga $\Phi(g) = h \in C^B$ gdje je $g \in C^A$ i $h : B \longrightarrow C$ definirano na sljedeci nacin: $h(b) = (\Phi(g))(b) = \{^{(g \circ f^{-1})(b),\ b \in f(A)}_{c_0,\ b \in B \setminus f(A)}$.$\Phi$ je dobro definirano jer je $f : A \longrightarrow f(A)$ bijekcija pa postoji $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$.Funkciju h smo definirali pomocu g te smo na taj nacin osigurali da za razlicite g-ove bude razlicito i $\Phi(g) = h$, tj da Φ bude injekcija, no dokazimo to egzaktno:
Neka su $g_1, g_2 \in C^A$ takve da je $g_1 \neq g_2$. Trebamo pokazati da je tada $\Phi(g_1) \neq \Phi(g_2)$. Kako je $g_1 \neq g_2$ to postoji $a_0 \in A$ takav da je $g_1(a_0) \neq g_2(a_0)$. Neka je $f(a_0) = b_0$, tada je $a_0 = f^{-1}(b_0)$.
Pa imamo da je $g_1(a_0) = g_1(f^{-1}(b_0)) = (g_1 \circ f^{-1})(b_0) = (\Phi(g_1))(b_0)$,
no isto tako je $g_2(a_0) = g_2(f^{-1}(b_0)) = (g_2 \circ f^{-1})(b_0) = (\Phi(g_2))(b_0)$.
A kako je $g_1(a_0) \neq g_2(a_0)$ to je onda $(\Phi(g_1))(b_0) \neq (\Phi(g_2))(b_0) \implies \Phi(g_1) \neq \Phi(g_2)$. Dakle Φ je doista injekcija pa je tvrdnja dokazana[23] ■

Corollary 53 *Vrijede sljedece relacije za* $c = k\mathbb{R}$
(i) $n \cdot c = \aleph_0 \cdot c = c \cdot c = c$
(ii) $n^{\aleph_0} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$; $n \geq 2$
(iii) $n^c = (\aleph_0)^c = c^c = 2^c$; $n \geq 2$

Proof. (i) Kako vrijedi da je $A_1 \subseteq A_n \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ to zbog Nap.7 slijedi da je $kA_1 \leq kA_n \leq k\mathbb{N} \leq k\mathbb{R} \implies 1 \leq n \leq \aleph_0 \leq c$.Pomnozimo li posljednju relaciju s c, dobijamo: $1 \cdot c \leq n \cdot c \leq \aleph_0 \cdot c \leq c \cdot c$. No kako je prema Kor.50 (svojstvo 2)) $1 \cdot c = c$, i kako je zbog Kor.51 (svojstvo 3)a)) $c \cdot c = c$, to imamo: $c \leq n \cdot c \leq \aleph_0 \cdot c \leq c$.Primijenimo li sad po dva puta uzastopno Propoz.20 sv.(iii)) i Kor.23 imamo: $n \cdot c = \aleph_0 \cdot c = c$

(ii) Slicno kao i u dokazu pod (i) vrijedi: $2 \leq n \leq \aleph_0 \leq c$. Potenciramo li posljednju relaciju s $\aleph_0$ imat cemo zbog Tm.52 (svojstvo 3)): $2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq (\aleph_0)^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0}$. No kako vrijedi $2^{\aleph_0} = c$ (Tm.48) i : $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ =(Tm.49 svojstvo8))= $2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$ =(Kor.51 svojstvo 2)b))= $2^{\aleph_0} = c$, pa imamo: $c \leq n^{\aleph_0} \leq$

[23]Dokazimo i na drugi nacin injektivnost: Neka su $g_1, g_2 \in C^A$ takve da vrijedi da je $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$. Treba dokazati da je tada i $g_1 = g_2$. Kako je $\Phi(g_1) = \Phi(g_2) \implies (\Phi(g_1))(b) = (\Phi(g_2))(b), \forall b \in B \implies (g_1 \circ f^{-1})(b) = (g_2 \circ f1)(b), \forall b \in f(A)$ & $c_0 = c_0$, $\forall b \in B \setminus f(A)$. Kako je drugi dio konjukcije uvijek istinit $\implies g_1 \circ f^{-1} = g_2 \circ f1$. No kako je f^{-1} surjekcija tj prema Tm.13 i epimorfizam, to je prema Def.16 dozvoljeno "kracenje s desna" $\implies g_1 = g_2$, tj Φ je injekcija.

$(\aleph_0)^{\aleph_0} \leq c$ odnosno primijenimo li po dva puta uzastopno Propoz.20 sv.(iii)) i Kor.23 konacno dobijemo: $n^{\aleph_0} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$.

(iii) Na slican nacin kao u dokazu pod (i) vrijedi: $2 \leq n \leq \aleph_0 \leq c$. Potenciramo li posljednju relaciju s c imat cemo zbog Tm.52 (svojstvo 3)): $2^c \leq n^c \leq (\aleph_0)^c \leq c^c$. No kako je $c^c = \left(2^{\aleph_0}\right)^c$ =(Tm.49 svojstvo 8))= $2^{\aleph_0 \cdot c}$ =(zbog (i))= 2^c. Primjenimo li po dva puta uzastopno Propoz.20 (sv. iii)) i Kor.23 konacno dobijemo: $n^c = (\aleph_0)^c = c^c = 2^c$. ■

Corollary 54 *Neka je* $\lambda = 2^c$ $(c = k\mathbb{R})$. *Tada je* $\lambda = k\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ *i vrijedi:* $n + \lambda = \aleph_0 + \lambda = c + \lambda = \lambda + \lambda = \lambda$

Proof. Neka je $\lambda = 2^c$. Tada je $k\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ =(Def.26)= c^c =(Tm.48)= $\left(2^{\aleph_0}\right)^c$ = (Tm.49 svojstvo8))= $2^{\aleph_0 \cdot c}$ =(Kor.53 svojstvo i))= $2^c = \lambda$, dakle doista je $\lambda = k\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$.

Nadalje jer vrijedi da je $A_n \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ to zbog Nap.7 slijedi da je $kA_n \leq k\mathbb{N} \leq k\mathbb{R} \implies 1 \leq n \leq \aleph_0 \leq c$.
[Pokazimo sad da vrijedi i $c \leq 2^c$: prema Tm.32 je dakle $k\mathbb{R} < k2^{\mathbb{R}} \implies$ (Def.26) $\implies c < 2^c \implies$ (Def.23) $\implies c \leq 2^c$[24]]
Mozemo dakle pisati $n \leq \aleph_0 \leq c \leq 2^c = \lambda$. Dodamo li posljednjoj nejednakosti λ to zbog Tm.52 (svojstvo 1)) imamo: $\underline{n + \lambda \leq \aleph_0 + \lambda \leq c + \lambda \leq \lambda + \lambda}$.
[Sad imamo: $\lambda + \lambda$ =(Kor.50 svojstvo2))= $1 \cdot \lambda + 1 \cdot \lambda$ = (Tm.49 svojstvo 5))= $\lambda(1+1) = \lambda \cdot 2$ =(Tm.49 sv.3))= $2 \cdot \lambda = 2 \cdot 2^c$ =(Kor.50 sv.4))= $2^1 \cdot 2^c$ =(Tm.49 sv.6))= 2^{1+c} =...(jer je $1 + c$ =prema Def.26= $k(A_1 \cup \mathbb{R})$ =to je unija beskonacnog i konacnog pa zbog Tm.35= $k\mathbb{R} = c$)...= $2^c = \lambda$, dakle $\lambda + \lambda = \lambda$.]
[Na slican nacin je $n + \lambda = \lambda$ ($\boxed{?}$ trenutno ne mogu se pozvati na neku tvrdnju kojom bi potkrijepili vjerojatnu cinjenicu da je $\lambda = 2^c$ beskonacni kardinal, pa da mozemo sa sigurnoscu primijeniti Tm.35, no ne vidim drugog razloga da $n + \lambda$ bude jednako λ]

Sada zbog potcrtanog imamo: $\lambda \leq \aleph_0 + \lambda \leq c + \lambda \leq \lambda$, pa primijenimo li po dva puta uzastopno Propoz.20 sv.(iii)) i Kor.23 imamo konacno: $n + \lambda = \aleph_0 + \lambda = c + \lambda = \lambda + \lambda = \lambda$. ■

Uredjeni skupovi

Definition 27 *Neka je* X *neprazan skup i* $R \subseteq X \times X$ *binarna relacija na* X. *Ako je* R *refleksivna, antisimetricna i tranzitivna, onda se* R *naziva* relacija parcijalnog uredjaja *i umjesto* R *pise se* " $\leq$ ". $(X, \leq)$[25] *naziva se* uredjen skup.

---

[24] Pokazimo na drugi nacin da vrijedi $c \leq 2^c$: Prema prvom dijelu dokaza pokazali smo da vrijedi $1 \leq n \leq \aleph_0 \leq c$, primijenimo li dva puta uzastopno Propoz.20 imamo: $1 \leq c$.Prema Tm.52 (svojstvo 4)) je onda $c^1 \leq c^c$. Prema Kor.53 svojstvo iii) je $c^c = 2^c$, a prema Kor.50 (svojstvo 4)) je $c^1 = c$, pa imamo da je $c \leq 2^c$.

[25] Ispravnije bilo pisati $(X, \leq_X)$ ili $(Y, \leq_Y)$ tj naznaciti da se radi o relaciji na skupu X odnosno Y, no radi jednostavnosti to ce redovito biti izostavljeno dokle god nece izazavati konfuziju.

Za uredjen skup $(X, \leq)$ *kazemo da je* totalno (potpuno) uredjen *ili* lanac *ako* $(\forall x, y \in X)$ *je* $x \leq y$ *ili* $y \leq x$[26].

Example 10 *1)* $(F(X), \subseteq)$ *je uredjen skup, koji nije potpuno uredjen*
2) $(\mathbb{R}, \leq)$ *je potpuno uredjen skup.*

Definition 28 *Neka su* $(X, \leq_X)$ *i* $(Y, \leq_Y)$ *uredjeni skupovi i* $f : X \longrightarrow Y$ *funkcija. Kazemo da je* f uzlazna *ili* rastuca *(ili da* cuva uredjaj*), ako* $\forall x, x' \in X$, $x \leq_X x' \implies f(x) \leq_Y f(x')$

Example 11 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
a) $f(x) = x^3$ *je uzlazna f-ja.*
b) $f(x) = x^2$ *nije uzlazna.*

Remark 16 *Kompozicija uzlaznih funkcija je uzlazna funkcija, i identiteta je uzlazna funkcija.*

Proof. Neka su $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ uzlazne funkcije i $gf : X \longrightarrow Z$ njihova kompozicija.
Ako je $x \leq x' \implies$ jer je f uzlazna $\implies f(x) \leq f(x')$. No kako su $f(x), f(x') \in Y$, i $f(x) \leq f(x') \implies g(f(x)) \leq g(f(x'))$ tj $(gf)(x) \leq (gf)(x')$, dakle kompozicija gf je takodjer uzlazna.
Ako je $x \leq x' \implies id_X(x) = x \leq x' = id_X(x')$, tj identiteta je takodjer uzlazna. ■

Uredjeni skkupovi i uzlazna preslikavanja tvore kategoriju.

Definition 29 *Neka je* $f : X \longrightarrow Y$ *uzlazna funkcija.* f *je* izomorfizam uredjenih skupova *ako postoji* *uzlazno* *preslikavanje* $g : Y \longrightarrow X$ *takvo da je* $gf = id_X$ *i* $fg = id_Y$[27]

Theorem 55 *Neka su* X *i* Y *totalno uredjeni skupovi i* $f : X \longrightarrow Y$ *uzlazna bijekcija. Tada je* f *izomorfizam uredjenih skupova.*

Proof. Kako je $f : X \longrightarrow Y$ bijekcija, to je prema Tm.13 f i izomorfizam, a prema Def.16 to znaci da postoji $g : Y \longrightarrow X$ takvo da je $gf = id_X$ i $fg = id_Y$. Da bi f bio izomorfizam uredjenih skupova, treba prema Def.29 treba jos pokazati da je g uzlazno preslikavanje:

Prema Def.28 odaberimo dvije proizvoljne tocke $y, y' \in Y$ takve da je $y \leq y'$(to ima smisla zahtijevati za bilo koje dvije tocke jer je Y totalno uredjen). Trebamo pokazati da je tada i $g(y) \leq g(y')$:
Neka je $g(y) = x$ i $g(y') = x'$. Kako je X totalno uredjen to prema Def.27 znaci da je ili $x \leq x'$ ili $x' \leq x$:
Ako je $x \leq x'$: onda je $g(y) \leq g(y')$ pa je g uzlazno.
Ako je $x' \leq x$: onda je $g(y') \leq g(y)$. No kako su $g(y'), g(y) \in X$, i $g(y') \leq g(y)$

[26] Mozemo reci i ovako: svi elementi totalno uredjenog skupa su *usporedivi*
[27] Zbog Def.16 (i Tm.13) mozemo reci i ovako: Uzlazno f je izomorfizam uredjenih skupova ako postoji uzlazni izomrofizam (uzlazna bijekcija) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

to jer je f uzlazno znaci da je $f(g(y')) \leq f(g(y)) \implies (fg)(y') \leq (fg)(y) \implies id_Y(y') \leq id_X(y) \implies \underline{y' \leq y}$. Kako je relacija "$\leq$" relacija parcijalnog uredjaja, tj prema Def.27 i antisimetricna, to iz potcrtanog prema Def.13 slijedi $y = y'$. No onda je $g(y) = g(y') \in X$, ali je zbog refleksivnosti relacije $\leq$ na skupu X : $g(y) \leq g(y) = g(y')$ tj $g(y) \leq g(y')$ sto je i trebalo pokazati.
Dakle g je uzlazno, pa je f izomorfizam uredjenih skupova. ■

Remark 17 *Nakon posljednje definicije i teorema mozemo ovako reci: U svim uredjenim skupovima vrijedi: Ako je f izomorfizam uredjenih skupova $\implies$ f je uzlazna bijekcija. No iskaz: Ako je f uzlazna bijekcija $\implies$ f je izomorfizam uredjenih skupova, vrijedi samo u totalno uredjenim skupovima.*

Definition 30 *Neka su X i Y uredjeni skupovi. Kazemo da su X i Y* slicni *ako postoji izomorfizam uredjenih skupova $f : X \longrightarrow Y$, i pisemo $X \cong Y$. (f se jos naziva i* preslikavanje slicnosti*)*

Remark 18 *U daljem tekstu cemo izraze: "preslikavanje slicnosti", "slicnost", "izomorfizam uredjenih skupova", (nekad krace samo "izomorfizam" kad je jasno da se radi o uredjenim skupovima), "uzlazni izomorfizam", (ili "uzlazna bijekcija", kad se radi o totalno uredjenim skupovima)... smatrati* ***sinonimima.***

Theorem 56 *Neka je X uredjen skup. Tada postoji uredjen skup $Y \subseteq F(X)$ takav da je $X \cong Y$.*

Proof. Treba dakle za svaki uredjeni X pronaci uredjeni $Y \subseteq F(X)$, takav da je $X \cong Y$ tj takav da se, prema Def.30, uvijek moze pronaci izomorfizam uredjenih skupova $f : X \longrightarrow Y$.
U tu svrhu pridruzimo svakom $x \in X$ skup: $X_x = \{x' \in X \mid x' \leq x\}$.(Primijetimo da je $X_x \neq \emptyset$ $\forall x$, jer je barem $x \in X_x$). $X_x \subseteq X$, tj $X_x \in F(X)$.
Stavimo sada $Y = \{X_x \mid x \in X\} \subseteq F(X)$.(Ocito je i $Y \neq \emptyset$ upravo jer je $X_x \neq \emptyset$ $\forall x$). Y je uredjen relacijom "$\subseteq$".
Potrazimo sad izomorfizam uredjenih skupova $f : X \longrightarrow Y$. Definirajmo $\underline{f(x) = X_x}$.
Pokazimo sad da je ovako definirano f izomorfizam uredjenih skupova:
Prema Def.29 trebamo pokazati da je f uzlazna i da postoji uzlazno $g : Y \longrightarrow X$ takvo da je $gf = id_X$ i $fg = id_Y$. Medjutim ovaj drugi uvjet moze se i drugacije izraziti: prema Def.16 ako postoji (nenuzno uzlazno) $g : Y \longrightarrow X$ takvo da je $gf = id_X$ i $fg = id_Y$ slijedi da je f izomorfizam, tj. prema Tm.13 da je f bijekcija. A ako je f bijekcija onda trazeno g mozemo protumaciti kao f^{-1}.
Dakle: da bismo dokazali da je f izomorfizam uredjenih skupova, trebamo dokazati: da je f uzlazno, da je f bijekcija, te da je f^{-1} uzlazno!

T_1: f je bijekcija:
Injektivnost:
Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Treba pokazati da je tada $x_1 = x_2$.Kako je $f(x_1) = f(x_2) \implies X_{x_1} = X_{x_2} \implies$[28] $X_{x_1} \subseteq X_{x_2}$ & $X_{x_2} \subseteq X_{x_1}$.
Iz $X_{x_1} \subseteq X_{x_2}$ slijedi $x_1 \in X_{x_1} \implies x_1 \in X_{x_2} \implies x_1 \leq x_2$

[28] Iz algebre skupova je poznata relacija $A = B \iff A \subseteq B$ & $B \subseteq A$

Iz $X_{x_2} \subseteq X_{x_1}$ slijedi $x_2 \in X_{x_2} \implies x_2 \in X_{x_1} \implies x_2 \leq x_1$
Iz dobijenih nejednakosti, zbog antisimetricnosti uredjajne relacije(Def.27)"$\leq$ " slijedi prema Def.13 da je $x_1 = x_2$.Dakle f je injektivno.
Surjektivnost:
Odaberimo proizvoljni $X_{x_0} \in Y$. Trebamo pronaci $a \in X$ takav da je $f(a) = X_{x_0}$. Kako je f definirano kao $f(x) = X_x$ to znaci da treba biti $f(a) = X_a = X_{x_0} \implies a = x_0$. Dakle pronasli smo $x_0 \in X$ koji se f -om preslikao u proizvoljno odabrani X_{x_0}, pa je f surjektivno.
Dakle f je bijekcija. Kako je f bijekcija to postoji f^{-1}:

T$_2$: f i f^{-1} su uzlazna preslikavanja.

f je uzlazno:
Neka je $x_1 \leq x_2$. Prema Def.28 treba pokazati da je onda $f(x_1) \subseteq f(x_2)$ (uredjajna relacija u Y je relacija "$\subseteq$ " jer su elementi u Y skupovi), odnosno da je $X_{x_1} \subseteq X_{x_2}$, tj. da za proizvoljni $x \in X_{x_1} \implies x \in X_{x_2}$.
Kako je dakle $x_1 \leq x_2 \implies x_1 \in X_{x_2}$. Odaberimo proizvoljni $x \in X_{x_1}$.To znaci da je $x \leq x_1$. Zbog tranzitivnosti relacije "$\leq$" (Def.27 i Def.13) iz $x \leq x_1$ & $x_1 \leq x_2 \implies x \leq x_2 \implies x \in X_{x_2}$ tj vrijedi: $X_{x_1} \subseteq X_{x_2}$ odnosno: $f(x_1) \subseteq f(x_2)$. Dakle f je uzlazno.
f^{-1} je uzlazno:
Neka je $X_{x_1} \subseteq X_{x_2}$.Prema Def.28 treba pokazati da je onda $f^{-1}(X_{x_1}) \leq f^{-1}(X_{x_2})$. Kako je f^{-1}definirano sa $f^{-1}(X_x) = x$ to znaci da treba pokazati da je onda $x_1 \leq x_2$.
Kako je $X_{x_1} \subseteq X_{x_2}$ to onda imamo $x_1 \in X_{x_1} \implies x_1 \in X_{x_2} \implies$ (prema definiciji skupa X_{x_2}) $\implies x_1 \leq x_2$. Dakle f^{-1} je uzlazno.

Dakle za svaki uredjen skup X pronasli smo uredjen skup $Y \subseteq F(X)$ takav da postoji izomorfizam uredjenih skupova $f : X \longrightarrow Y$, tj prema Def.30 pronasli smo Y takav da je $X \cong Y$ sto se u teoremu i trazilo. ■

Theorem 57 *Neka su X i Y slicni uredjeni skupovi. Ako je X totalno uredjen onda je i Y totalno uredjen*

Proof. Neka su X i Y slicni uredjeni skupovi.Trebamo pokazati da je Y totalno uredjen tj prema Def.27 da $\forall y_1, y_2 \in Y$ vrijedi: $y_1 \leq y_2$ ili $y_2 \leq y_1$.
Kako su X i Y slicni uredjeni skupovi to prema Def.30 znaci da postoji izomorfizam uredjenih skupova $f : X \longrightarrow Y$. Kako je f izomorfizam uredjenih skupova to prema Def.29 znaci da je f uzlazno i da postoji uzlazna bijekcija $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Neka su $y_1, y_2 \in Y$ proizvoljni i neka je $f^{-1}(y_1) = x_1$ i $f^{-1}(y_2) = x_2$. Kako je X totalno uredjen to je ili $x_1 \leq x_2$ ili $x_2 \leq x_1$. No onda je zbog uzlaznosti od f: $f(x_1) \leq f(x_2)$ ili $f(x_2) \leq f(x_1)$ tj $y_1 \leq y_2$ ili $y_2 \leq y_1$ $(\forall y_1, y_2 \in Y)$ sto znaci da su $y_1, y_2 \in Y$ usporedivi. ■

Definition 31 *Neka je X uredjen skup i* $\boxed{x_0 \in X.}$
Kazemo da je x_0 minimum (maksimum) *skupa X ako vrijedi:*
$x_0 \leq x$ $(x \leq x_0)$ $(\forall x \in X)$, *(x_0 mora biti usporediv sa svakim elementom iz X)*
Kazemo da je x_0 minimalan (maksimalan) element *skupa X ako vrijedi:*
$x \leq x_0 \implies x = x_0$ $(x_0 \leq x \implies x_0 = x)$ $(\forall x \in X)$, *(x_0 ne mora biti usporediv sa svakim elementom)*

Remark 19 *Neka je X uredjen skup i $x_0 = \min X$ $(x_0 = \max X)$. Tada je x_0 minimalni element od X (maksimalni element od X). Obrat opcenito ne vrijedi.*

Proof. Neka je X uredjen relacijom "$\leq$" i neka je $x_0 = \min X$ $(x_0 = \max X)$. Da bismo pokazali da je i minimalan element (maksimalan element) treba $x \leq x_0 \implies x = x_0$ $(x_0 \leq x \implies x_0 = x)$. Neka je dakle $x \leq x_0$ $(x_0 \leq x)$. Kako je $x_0 = \min X$ $(x_0 = \max X)$ to prema gornjoj definiciji znaci da je $x_0 \leq x$ $(x \leq x_0)$ $\forall x$. No zbog tranzitivnosti relacije "$\leq$" (Def.27) i Def.13 slijedi $x = x_0$ $(x = x_0)$, $\forall x \in X$, tj x_0 je minimalni element (maksimalan element). ■

Remark 20 *Obrat vrijedi u totalno uredjenim skupovima, tj ako je x_0 minimalni element (maksimalni element) u totalno uredjenom skupu X onda je $x_0 = \min X$ $(x_0 = \max X)$.*

Proof. Neka je X totalno uredjen relacijom "$\leq$", i neka je x_0 minimalni (maksimalni) element. Da bismo pokazali da je tada $x_0 = \min X$ $(x_0 = \max X)$ prema gornjoj definiciji treba $\forall x \in X$ biti $x_0 \leq x$ $(x \leq x_0)$. Odaberimo proizvoljni $x \in X$. Kako je X totalno uredjen skup, prema Def.27 znaci da mora biti ili $x \leq x_0$ ili $x_0 \leq x$.

Neka je $x \leq x_0$: (Primijetimo da je tada odmah $x_0 = \max X$) Kako je x_0 minimalan element to prema gornjoj definiciji znaci da $x \leq x_0 \implies x = x_0$, a to znaci da je i $x_0 \leq x$ pa je $x_0 = \min X$.

Neka je $x_0 \leq x$: Tada je odmah $x_0 = \min X$. (Kako je x_0 maksimalan element to prema gornjoj definiciji znaci da $x_0 \leq x \implies x_0 = x$ a to znaci da je i $x \leq x_0$ pa je $x_0 = \max X$) ■

Theorem 58 *Neka je X konacan, totalno uredjen skup. Tada u X postoji $x_0 = \min X$ i $x_1 = \max X$.*

Proof. Dokaz cemo provesti indukcijom po $n = kX$.
Ako je $n = 1$ tvrdnja teorema je ispunjena, tj. $x_0 = 1 = \min X$ jer je $\min X = 1 \leq 1$ zbog refleksivnosti relacije "$\leq$", ali postoji i $x_0 = 1 = \max X$ jer je $1 \leq 1 = \max X$ takodjer zbog refleksivnosti relacije "$\leq$". (vidi Def.31 i Def.13)
Pp da je tvrdnja tocna $\forall k$ $1 \leq k \leq n$ tj ako je $kardX = k$ tada postoje $x_0 = \min X$ i $x_1 = \max X$.
Dokazimo da tada tvrdnja vrijedi i za $k + 1$: Tada je dakle $kardX = k + 1$ pa skup X mozemo prikazati u obliku $X = A \cup \{a\}$, $a \notin A$ gdje je $kardA = k$. Prema Pp postoje $a_1 = \min A$ i $a_n = \max A$. Zbog totalne uredjenosti od X je prema Def.27 ili $a \leq a_1$ ili $a_1 \leq a$ (a svakako je $a \neq a_1$ jer $a \notin A$).
a) Ako je $a \leq a_1$, a a_1 je $\min A$ (tj $a_1 \leq x, \forall x \in A$), onda je $a = \min X$ jer je tada zbog tranzitivnosti relacije "$\leq$": $a \leq x$, $\forall x \in X$, ali je onda takodjer zbog tranzitivnosti relacije "$\leq$" i definicije maksimuma: $a \leq a_n$ pa je $a_n = \max X$
b) Ako je $a_1 \leq a \leq a_n$ tada su prema Def.31 $a_1 = \min X$ i $a_n = \max X$.
c) Ako je $a_n \leq a$, a a_n je $\max A$ (tj $x \leq a_n$, $\forall x \in A$), onda je $a = \max X$ jer je tada zbog tranzitivnosti relacije "$\leq$": $x \leq a$, $\forall x \in X$, ali je onda takodjer zbog tranzivitnosti relacije "$\leq$" i definicje minimuma: $a_1 \leq a$, $\forall x \in X$ pa je $a_1 = \min X$. ■

Theorem 59 *Neka su X i Y totalno uredjeni, ekvipotentni, konacni skupovi. Tada su X i Y slicni.*

Proof. Dokaz provodimo indukcijom po $n = kardX = kardY$, na nacin da cemo dokazati da iz uvjeta teorema slijedi da postoji uzlazna bijekcija : $X \longrightarrow Y$ sto prema Tm.55 znaci da postoji izomorfizam uredjenih skupova : $X \longrightarrow Y$, a to prema Def.30 znaci da je $X \cong Y$.
Ako je $n = 1$ tvrdnja je istinita.
Pp da tvrdnja vrijedi $\forall k\ 1 \leq k \leq n$.
Dokazimo da tada tvrdnja vrijedi i za $k+1$: Neka su dakle X i Y totalno uredjeni i $kardX = kardY = k+1$. Prema Tm.58 postoje $\min X = x_0$ i $\min Y = y_0$.Neka su sada $A = X \backslash \{x_0\}$ i $B = Y \backslash \{y_0\}$, sto znaci da je $kardA = kardB = k$. Prema Pp je $A \cong B$ sto prema Def.30 znaci da postoji izomorfizam uredjenih skupova $f : A \longrightarrow B$. Primijetimo da je zbog Def.29 f uzlazna bijekcija. Potrazimo sada uzlaznu bijekciju $\dot{g} : X \longrightarrow Y$. Definirajmo: $g(x) = \{^{f(x),\ x \in A}_{y_0,\ x = x_0}$. g je ocito bijekcija jer je f bijekcija. Pokazimo da je g uzlazno: Odaberimo proizvoljne $x_1, x_2 \in X$.
Ako je jedan od njih, recimo $x_1 = x_0$, tada je svakako $x_1 \leq x_2 \implies g(x_1) = g(x_0) = y_{0'} \leq f(x_2) = g(x_2)$ tj g je uzlazno, a ako je $x_1, x_2 \neq x_0$, tada $x_1 \leq x_2 \implies$ jer je f uzlazno $\implies g(x_1) = f(x_1) \leq f(x_2) = g(x_2)$, tj g je i u ovom slucaju uzlazno.

Dakle postoji uzlazna bijekcija $g : X \longrightarrow Y$ pa prema Tm.55 g je izomorfizam uredjenih skupova a to prema Def.30 znaci da je $X \cong Y$. ■

Definition 32 *Kazemo da je $x_0 \in X$ (uredjen)* donja (gornja) medja *podskupa $A \subseteq X$ ako vrijedi: $(\forall x \in A)\ x_0 \leq x\ (x \leq x_0)$*[29]

Definition 33 *Neka je X uredjen skup i $A \subseteq X$.* Infimum (supremum) *skupa A je maksimum (minimum) skupa donjih (gornjih) medja od A.*[30]

Proposition 60 *Neka je X uredjen skup i $A \subseteq X$. Ako je $a_0 = \min A$, onda je $a_0 = \inf A$. Analogno ako je $a_0 = \max A$, onda je $a_0 = \sup A$*

Proof. Neka je $a_0 = \min A\ (a_0 = \max A)$. Treba pokazati da je tada $a_0 = \inf A\ (a_0 = \sup A)$ tj da je a_0 donja (gornja) medja i da je a_0 najveca (najmanja) donja medja:

a) Ako je $a_0 = \min A$, to prema Def.31 vrijedi $a_0 \in A,\ a_0 \leq a, \forall a \in A$.No to prema Def.32 znaci da je a_0 donja medja skupa A. Pokazimo sad da je a_0 veci od svih donjih medja: Neka je x proizvoljna donja medja skupa A. Tada je $x \leq a$, $\forall a \in A$, no onda je i $x \leq a_0$ (jer je $a_0 \in A$). Ocito je prema definiciji maksimuma a_0 upravo maksimum skupa donjih medja od A, dakle $a_0 = \inf A$.

b) Ako je $a_0 = \max A$, to prema Def.31 vrijedi $a_0 \in A$, $a \leq a_0, \forall a \in A$. No to prema Def.32 znaci da je a_0 gornja medja skupa A. Pokazimo sad da je a_0 manji od svih gornjih medja: Neka je x proizvoljna gornja medja skupa A.Tada

[29] Primijetimo da x_0 ne mora biti element od A, za razliku od $\min A$ ($\max A$) koji mora biti iz A (vidi Def.31)
[30] Ni $\inf A$ ni $\sup A$ takodjer ne moraju biti elementi skupa A.

je $a \leq x\ \forall a \in A$, no onda je i $a_0 \leq x$ (jer je i $a_0 \in A$). Ocito je prema definiciji minimuma a_0 upravo minimum skupa gornjih medja od A, dakle $a_0 = \sup A$. ■

Theorem 61 *Neka su* $(X, \leq)$ *i* $(Y, \leq)$ *slicni uredjeni skupovi i* $f : X \longrightarrow Y$ *preslikavanje slicnosti (tj izo.uredjenih skupova). Tada* f *ima sljedeca svojstva:*

(i) Ako je A *lanac u* X, *onda je* $f(A)$ *lanac u* Y

(ii) Ako je x_0 *minimalan (maksimalan) element u* X *onda je* $f(x_0)$ *minimalan (maksimalan) element u* Y

(iii)Ako je $x_0 = \min X$ $(x_0 = \max X)$, *onda je* $f(x_0) = \min Y$ $(f(x_0) = \max X)$

(iv)Ako je $A \subseteq X$ *omedjen, onda je* $f(A) \subseteq Y$ *omedjen.*

(v) Ako postoji infimum (supremum) podskupa $A \subseteq X$, *onda postoji infimum (supremum) podskupa* $f(A) \subseteq Y$

Proof. (i) Kako je f slicnost, to je i restrikcija $f\ |_A\colon A \longrightarrow f(A)$ takodjer preslikavanje slicnosti, pa je prema Def.30 $A \cong f(A)$. Ako je A totalno uredjen, onda je zbog Tm.57 i $f(A)$ totalno uredjen.

(ii) Neka je x_0 maksimalan element u X. Treba dokazati da je $f(x_0)$ maksimalan element u Y. Pretpostavimo suprotno tj neka postoji $y_1 \in Y$ takav da je $f(x_0) < y_1$. Kako je f slicnost, to prema Def.29 postoji $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, pa imamo da je $f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(y_1) \implies x_0 < f^{-1}(y_1) \in X$ sto je kontradikcija s pocetnom pretpostavkom da je x_0 maksimalan element u X.
Analogno se dokaze i za minimalan element.

(iii) Neka je $x_0 = \max X$. Treba dokazati da je onda i $f(x_0) = \max Y$, tj da je $\forall y \in Y$, $y \leq f(x_0)$. Odaberimo proizvoljni $y \in Y$. Kako je f slicnost, to je prema Nap.17 i uzlazna bijekcija pa postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Kako je $x_0 = \max X$ to onda vrijedi i $x \leq x_0$, a posto je f uzlazno to prema Def.28 slijedi $f(x) = y \leq f(x_0)$, $\forall y \in Y$,dakle prema Def.31 je $f(x_0) = \max Y$.
Analogno se dokaze i za minimum.

(iv) Neka je $A \subseteq X$ omedjen. To znaci da postoji bar jedna gornja i bar jedna donja medja skupa A. Da bismo dokazali da je i $f(A)$ omedjen dovoljno mu je pronaci jednu gornju i jednu donju medju:
Neka je $x \in X$ gornja medja skupa A. Dokazimo da je tada i $f(x)$ gornja medja skupa $f(A)$, tj (Def.32) da $\forall y \in f(A)$ vrijedi $y \leq f(x)$. Odaberimo proizvoljni $y \in f(A)$. Kako je prema Nap.17 f uzlazna bijekcija, to postoji $a \in A$ takav da je $y = f(a)$. Kako je x gornja medja od A to je $a \leq x$, a onda je zbog uzlaznosti od f i $f(a) = y \leq f(x), \forall y \in Y$, sto znaci da je zaista $f(x)$ gornja medja od $f(A)$.
Analogno se dokaze da ako je $x \in X$ donja medja skupa A, slijedi da je i $f(x)$ donja medja skupa $f(A)$.
Dakle $f(A) \subseteq Y$ je omedjen.

(v) Neka je $x_0 = \sup A$. To prema Def.33 posebno znaci da je x_0 i gornja medja od A. Prema dokazu pod (iv) onda slijedi da je $f(x_0)$ gornja medja od $f(A)$. Da bi $f(x_0)$ bio i $\sup f(A)$ preostaje dokazati da je $f(x_0)$ najmanja gornja medja:
Pp suprotno tj. neka je $y_0 \in Y$ gornja medja od $f(A)$ koja je manja od $f(x_0)$ tj:

$y_0 < f(x_0)$. No kako je f slicnost to prema Def.29 postoji uzlazno $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, pa je $f^{-1}(y_0) < f^{-1}(f(x_0)) = x_0$.Tada je zbog dokaza pod (iv) $f^{-1}(y_0)$ takodjer gornja medja od A i to manja od x_0, sto je kontradikcija s polaznom Pp da je $x_0 = \sup A$ tj najmanja gornja medja skupa A. Dakle $f(x_0) \leq$ od bilo koje druge gornje medje od $f(A)$, pa je $f(x_0) = \sup f(A)$, tj postoji supremum podskupa $f(A) \subseteq Y$.
Analogno se dokaze i za infimum. ■

Definition 34 *Neka je $(X, \leq)$ potpuno uredjen skup. $(X, \leq)$ cemo pridruziti jedan objekt u oznaci* ***tX*** *koji nazivamo* redni tip *potpuno uredjenog skupa X i to na sljedeci nacin: $tX = tY \iff X \cong Y$*

Remark 21 *Iz Tm.59 izlazi da svaka dva konacna, potpuno uredjena, ekvipotentna skupa, su slicna tj imaju isti redni tip. Ako je X konacan potpuno uredjen skup i $kX = n$, onda se pise $tX = n$, $t\emptyset = 0$ ($\emptyset$ se drzi potpuno uredjenim).*

$\mathbb{N} = \omega \backslash \{0\}$. No premda je $\mathbb{N}$ pravi podskup od ω, $t\mathbb{N} = \omega$ i $t\omega = \omega$, tj imaju isti redni tip jer su slicni.

$-\mathbb{N} = \{\ldots, -n, \ldots, -1\}$; $t(-\mathbb{N}) = \omega^*$, $t(-\mathbb{N}) \neq t\mathbb{N}$, $\omega \neq \omega^*$ (jer $-\mathbb{N}$ ima razlicitu uredjajnu strukturu od $\mathbb{N}$, ne vrijedi Tm.61)

$t\mathbb{Z} \neq \omega, \omega^*$

$t([0,1]) \neq t(\langle 0,1 \rangle)$

Definition 35 *Neka je $(X, \leq)$ potpuno uredjen skup. Kazemo da je X* gust *ako $\forall a, b \in X$ postoji $c \in X$ takav da je $a < c < b$.*

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ nisu gusti; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ su gusti..

Definition 36 *Neka je $(X, \leq)$ potpuno uredjen skup. Svaka particija[31] skupa X na dva neprazna disjunktna podskupa A i B sa svojstvom da je $\forall a \in A$ i $\forall b \in B$, $a < b$, naziva se* prerezom u skupu X.

Pri prerezu mogu nastupiti sljedeci slucajevi:

1. A ima maksimum a B ima minimum. Ovakav prerez naziva se *skok* (npr. u $\mathbb{N}$)] [.

2. A nema maksimum a B ima minimum. $\rangle$ [

3. A ima maksimum a B nema minimum] $\langle$

4. A nema maksimum a B nema minimum $\rangle$ $\langle$.Ovakav prerez definira *prazninu* u skupu X (ne moze se pojaviti u $\mathbb{R}$)

U slucaju 2. i 3. kazemo da je prerez proveden nekim elementom iz X.

Example 12 $\langle -\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = A$; $[\sqrt{2}, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q} = B$; $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

[31] Particija znaci da unija tako dobijenih disjunktnih podskupova mora biti jednaka skupu.

Remark 22 *Ako je skup gust onda nema skokova.*

$t\mathbb{Q} = \eta \neq \omega$

Definition 37 *Ako potpuno uredjeni skup* $(X, \leq)$ *nema skokova ni praznina kazemo da je* X neprekidan skup.

$\mathbb{Q}$ nije neprekidan, $\mathbb{R}$ jeste neprekidan;
$t\mathbb{R} = \lambda \neq \eta$

Definition 38 *Neka su* X *i* Y *disjunktni, potpuno uredjeni skupovi.* Redna unija *u oznaci* $\langle X \cup Y \rangle$ *je potpuno uredjen skup* $X \cup Y$ *s uredjajem koji je ovako definiran:*
X *i* Y *zadrzavaju svoj uredjaj u uniji, a uz to je* $X < Y$, *tj svi elementi iz* X *dolaze prije svakog elementa iz* Y.
$a_1 \leq_{\langle X \cup Y \rangle} a_2 \iff (a_1 \leq_X a_2) \vee (a_1 \leq_Y a_2) \vee (a_1 \in X \ \ \& \ \ a_2 \in Y)$

Definition 39 *Neka su* α, β *zadani redni tipovi, te* A *i* B *disjunktni, potpuno uredjeni skupovi, takvi da je* $tA = \alpha$, $tB = \beta$. Suma rednih tipova $\alpha + \beta$ *se definira kao redni tip redne unije tj:*

$$\alpha + \beta = tA + tB \stackrel{def}{=} t \langle A \cup B \rangle \tag{11}$$

- Asocijativnost zbrajanja rednih tipova proizlazi iz definicije redne unije: Neka su α, β, γ redni tipovi skupova A, B, C, imamo: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ jer je $\langle \langle A \cup B \rangle \cup C \rangle = \langle A \cup \langle B \cup C \rangle \rangle$.

- Komutativnost zbrajanja rednih tipova ne vrijedi kao sto pokazuje sljedeci primjer:

  $1 + \omega = t \langle \{0\} \cup \mathbb{N} \rangle = t\{0, 1, \ldots, n, \ldots\} = \omega$

  $\omega + 1 = t \langle \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle = t\{1, \ldots, n, \ldots, 0\} \neq \omega$ $\boxed{?}$ (ima li smisla redna unija $\langle \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle$ jer prema Def.38 mora biti $\mathbb{N} < \{0\}$ a to nije)(Nadalje da bi skupovi $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ i $\{1, \ldots, n, \ldots, 0\}$ imali isti redni tip, prema Def.34 znaci da moraju biti slicni, tj da se prema Tm.55 moze uspostaviti uzlazna bijekcija izmedju njih, sto ovdje nije moguce)

Definition 40 *Neka su* X *i* Y *potpuno uredjeni skupovi. Kartezijev produkt* $X \times Y$ *moze se snabdjeti potpunim uredjajem na sljedeci nacin:*
$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \stackrel{def}{\iff} (x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2 \ \ \& \ \ y_1 \leq y_2)$
Ovakav uredjaj se naziva Leksikografski uredjaj.

Definition 41 *Neka su* α, β *zadani redni tipovi, te* A *i* B *potpuno uredjeni skupovi takvi da je* $tA = \alpha$ *i* $tB = \beta$. Umnozak $a \cdot \beta$ rednih tipova *je redni tip Kartezijevog produkta* $B \times A$ *uredjenog leksikografskim uredjajem, tj*

$$\alpha \cdot \beta = tA \cdot tB = t\,(B \times A) \tag{12}$$

- Mnozenje rednih tipova je asocijativno
- Mnozenje rednih tipova nije komutativno kao sto pokazuje sljedeci primjer:
  $\omega \cdot 2 = t(\{1,2\} \times \mathbb{N}) = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots\} = \omega + \omega \ \ (\neq \omega)$
  $2 \cdot \omega = t(\mathbb{N} \times \{1,2\}) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),\ldots\} = \omega$
  Dakle $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$

Theorem 62 *(**UREDJAJNA KARAKTERIZACIJA SKUPA** $\mathbb{Q}$): Neka su X iY potpuno uredjeni skupovi od kojih svaki ima sljedeca svojstva:*
(i) Nema ni prvog ni zadnjeg elementa
(ii) Gust je
(iii) Prebrojiv je
Tada su X i Y izomorfni.

Proof. Da bismo pokazali da su X i Y izomorfni treba pronaci slicno preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$. Kako su X i Y totalno uredjeni , to je prema Tm.55 dovoljno je da f bude uzlazna bijekcija.
Kako su X i Y prebrojivi to se prema Nap.11 mogu zapisati u obliku niza:
(1) $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$
(2) $Y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$[32]
f cemo izgraditi induktivno:
Neka je $f(x_1) = y_1$. [Trebamo voditi racuna da se radi o skupovima koji su gusti (vidi Def.35), a ne o skupovima nalik skupu prirodnih brojeva, te da manji indeks ne znaci i manji element po uredjaju, pa nam daljnja izgradnja poput $f(x_2) = y_2$ itd.. nece osigurati uzlaznost od f]. Da bi nam dakle f bilo uzlazno, daljnju konstrukciju nastavljamo na sljedeci nacin: Zelimo naci element iz X koji bi se preslikao u y_2. Kako mora biti zadovoljena uzlaznost, to taj element iz X mora biti u istom odnosu prema x_1 kao sto je y_2 prema y_1. Neka to bude element iz X s najmanjim indeksom (nakon x_1) koji zadovoljava taj uvjet. Kako to ne mora naravno biti x_2, oznacimo ga onda sa c_2, dakle $f(c_2) = y_2$. Nastavimo li konstrukciju na taj nacin, imat cemo $f(c_3) = y_3$, itd.
Pretpostavimo sad da smo f definirali na skupu $C_n = \{c_1 = x_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\} \subseteq X$ pri cemu je $f(C_n) = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq Y$.
Preostaje nam sad definirati f na sljedecem c_{n+1}, odnosno dati pravilo za nalazenje sljedeceg $c_{n+1} \in X$ i $f(c_{n+1}) \in Y$.
[Da bismo osigurali da pri daljnjem postupku nijedan element iz oba skupa necemo izostaviti, postupit cemo na sljedeci nacin:
... $n+1$-vi par cemo dobiti tako da najprije uzmemo,recimo, element iz $X \backslash C_n$ s najmanjim indeksom i njega oznacimo s c_{n+1}, i onda definiramo kako naci $f(c_{n+1})$,
... a za $n+2$-gi par cemo najprije uzeti element iz $Y \backslash f(C_{n+1})$ s najmanjim indeksom, pa za njega definirati kako naci c_{n+2} koji se preslikava u njega.
I tako dalje, za sljedeci par uzimamo najprije element iz domene, pa definiramo kako mu naci sliku.. a za par nakon tog uzimamo najprije element iz kodomene

[32] Elementi u oba skupa nisu zapisani po uredjaju (tj od najmanjeg ka najvecem (jer prema (i) ni ne postoje minimumi), nego se jednostavno radi o zapisu svih elemenata tih skupova.

...
Naravno mogli smo postupiti i obrunuto tj za $n+1$-vi clan traziti najprije el. kodomene, a za $n+2$-gi el.domene..itd]

Opisani postupak najlakse je provesti u djelo tako da ga definiramo posebno kad je n paran, a posebno kad je n neparan:

a) Ako je n paran: Uzmimo element s najmanjim indeksom iz skupa $X \backslash C_n$ i oznacimo ga s c_{n+1}. $f(c_{n+1})$ cemo odrediti ovako:
- Ako je c_{n+1} manji od svih elemenata iz C_n: onda neka $f(c_{n+1})$ bude element s najmanjim indeksom iz $Y \backslash f(C_n)$, koji je manji od svih elemenata iz $f(C_n)$.
- Ako je c_{n+1} veci od svih elemenata iz C_n: onda neka $f(c_{n+1})$ bude element s najmanjim indeksom iz $Y \backslash f(C_n)$, koji je veci od svih elemenata iz $f(C_n)$.
- Ako je c_{n+1} takav da nije niti veci niti manji od svih elemenata iz C_n, tj ako $\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takvi da je $c_i < c_{n+1} < c_j$, onda neka $f(c_{n+1})$ bude element s najmanjim indeksom iz $Y \backslash f(C_n)$, za koji vrijedi $f(c_i) < f(c_{n+1}) < f(c_j)$.

b) Ako je n neparan: Uzmimo element s najmanjim indeksom iz skupa $Y \backslash f(C_n)$ i oznacimo ga s y. Element $c_{n+1} \in X$ za koji je $f(c_{n+1}) = y$ odredjujemo onda na analogan nacin kao pod a).

Na opisani nacin konstruirali smo f koja se postupno prosiruje na citav skup $C = \{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ koji se od skupa X (1) razlikuje samo redoslijedom clanova, dok se skup $f(C) = \{f(c_1), \ldots, f(c_n), \ldots\}$ takodjer samo redoslijedom clanova razlikuje od skupa Y (2). Dakle vrijedi: $C = X$ i $f(C) = Y$. f je ocito uzlazno i injektivno, a konstrukcija osigurava i surjektivnost, tj f je uzlazna bijekcija, sto smo i trazili, pa jer su X i Y totalno uredjeni, prema Tm.55 slijedi da je f izomorfizam uredjenih skupova. ■

Corollary 63 *Neka je X prebrojiv, gust, totalno uredjen skup bez prvog i zadnjeg elementa. Tada je $tX = \eta$.*

Proof. Kako skupovi X i $\mathbb{Q}$ udovoljavaju uvjetima Tm.62, izlazi da je $X \cong \mathbb{Q}$ pa je prema Def.34 $tX = t\mathbb{Q} = \eta$. ■

Theorem 64 ***(UREDJAJNA KARAKTERIZACIJA SKUPA*** $\mathbb{R}$*): Neka su X i Y totalno uredjeni skupovi koji imaju sljedeca svojstva:*

(i) Nemaju prvog ni zadnjeg elementa

(ii) Imaju prebrojiv, gust podskup

(iii)Svaki neprazan omedjen odozgo podskup, bilo u X bilo u Y , ima supremum.
Tada su X i Y izomorfni.

Proof. Kako su X i Y totalno uredjeni skupovi, da bi bili izomorfni, dovoljno je prema Tm.55 pokazati da postoji uzlazna bijekcija $\Phi : X \longrightarrow Y$. Kako zbog (ii) X iY imaju prebrojive, guste podskupove (i totalno uredjene jer su X i Y takvi), bilo bi zgodno kad bismo pokazali da ti podskupovi udovoljavaju uvjetima prethodnog teorema, sto znaci da bi postojao izomorfizam izmedju njih, pa bismo Φ konstruirali pomocu tog izomorfizma:

Neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$, prebrojivi, gusti podskupovi (koji dakle postoje zbog (ii)), A i B su dakle i potpuno uredjeni kao podskupovi takvih. Da bi udovoljavali svim uvjetima prethodnog teorema preostaje nam dokazati da nemaju minimum ni maksimum: To, npr. za skup A, znaci da treba pokazati da nijedan $a \in A$ nije ni minimum ni maksimum od A, tj prema Def.31 $\forall a \in A$: $\exists a' \in A$ takav da je $a' < a$ (tj a nije minimum) i $\exists a'' \in A$ takav da je $a < a''$ (tj a nije maksimum). Neka je dakle $a \in A$ proizvoljan. Kako je takodjer $a \in X$, zbog (i) i Def.31 slijedi da $\exists x' \in X$ takav da je $x' < a$ i $\exists x'' \in X$ takav da je $a < x''$. No kako je A gust u X to znaci da $\exists a' \in A$ takav da je $x' < a' < a$ i $\exists a'' \in A$ takav da je $a < a'' < x''$, sto pokazuje da A nema ni minimuma ni maksimuma. Analogno se pokaze da ni B nema ni minimum ni maksimum.

Kako dakle A i B udovoljavaju uvjetima prethodnog teorema, to znaci da postoji uzlazna bijekcija $f : A \longrightarrow B$. Nas cilj je pronaci <u>uzlaznu</u> <u>bijekciju</u> $\boxed{\Phi : X \longrightarrow Y}$, a najlakse nam je to uciniti ako je konstruiramo kao prosirenje funkcije f na cijeli X, dakle zelimo da vrijedi: $\boxed{\Phi\mid_A = f}$. Definirajmo stoga: $\boxed{\Phi(x) = \sup\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\}}$.

T$_1$: Φ je dobro definirano.
Treba pokazati da doista postoji $\sup\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} \in Y$, (po svojstvu supremuma slijedi da je jedinstven).
Kako bismo dokazali da postoji supremum, najprije treba prema Def.33 pokazati da je skup $\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} \subseteq Y$ omedjen odozgo i neprazan, pa ce postojanje supremuma slijediti iz (iii).
- Pokazimo da je taj skup omedjen odozgo: Treba pokazati da $\forall x \in X$ vrijedi: za sve $a \in A$ takve da je $a \leq x \implies \exists a' \in A$, t da je $f(a) \leq f(a')$: Odaberimo $x \in X$. Zbog (i) $\exists x' \in X$ takav da je $x < x'$. Kako je A gust u X to postoji $a' \in A$ takav da je $x < a' < x'$.Dakle $\forall x \in X$ postoji $a' \in A$ t. da je $x < a'$. No onda i za sve $a \in A$ takve da je $a \leq x$ vrijedi $a < a'$, pa je (zbog uzlaznosti od f) $f(a) < f(a')$, sto znaci da je $f(a')$ gornja medja za $\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\}$.
- Skup $\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\}$ je i neprazan jer za proizvoljni $x \in X$, zbog (i) postoji $x' < x$, pa jer je A gust u X postoji $a \in A$ t. da je $x' < a < x$,dakle $\forall x \in X$ postoji $a \in A$ takav da je $a \leq x$, pa je $\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} \neq \emptyset$.
Dakle prema (iii) postoji $\sup\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} \in Y$.

T$_2$: $\Phi\mid_A = f$
Treba pokazati da je $\forall a \in A$: $\Phi(a) = f(a)$, tj da je za proizvoljno odabrani $a_0 \in A$ $f(a_0) = \sup\{f(a) \mid a \leq a_0, a \in A\}$, odnosno da je $f(a_0)$ najmanja gornja medja skupa $\{f(a) \mid a \leq a_0, a \in A\}$. Imamo: za svaki $a \in A$ takav da je $a \leq a_0 \implies$ jer je f uzlazno $\implies f(a) \leq f(a_0)$, sto znaci da je $f(a_0)$ gornja medja skupa $\{f(a) \mid a \leq a_0, a \in A\}$. Pokazimo da je i najmanja gornja medja: Neka je $y \in Y$ proizvoljna gornja medja, tj neka vrijedi $f(a) \leq y$ $(\forall a \leq a_0)$. No onda to posebno vrijedi i za $a \equiv a_0$, tj $f(a_0) \leq y$ pa je $f(a_0)$ manje od svake druge gornje medje, tj $f(a_0) = \sup\{f(a) \mid a \leq a_0, a \in A\} = \Phi(a_0)$. Kako je a_0 bio proizvoljno odabran, to vrijedi tvrdnja T$_2$.

T$_3$: Φ je uzlazno.
Treba pokazati da je $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2 \implies \Phi(x_1) \leq \Phi(x_2)$. No tu

implikaciju mozemo dokazati tako da dokazemo istinitost konjukcije sljedecih dviju:
$\forall x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \implies \Phi(x_1) < \Phi(x_2)$ & $x_1 = x_2 \implies \Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- Dokazimo najprije prvu: Radi pojednostavljenja, dokazat cemo je kroz cetiri moguca slucaja:
a) $x_1, x_2 \in A$: tada zbog uzlaznosti od f vrijedi: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \implies \Phi(x_1) < \Phi(x_2)$.
b) $x_1 \equiv a \in A$, $x_2 \equiv x \in X$: Imamo $a < x \implies$ jer je A gust u $X \implies \exists a' \in A$, $a < a' < x \implies \Phi(a) = f(a) < f(a') = \Phi(a')$. No kako je $a' < x$, to je $f(a') \in \{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} \implies f(a') \leq \sup\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} = \Phi(x)$. Pa imamo: $\Phi(a) = f(a) < f(a') \leq \Phi(x)$, tj $\Phi(a) < \Phi(x)$.
c) $x_1 \equiv x \in X$, $x_2 \equiv a \in A$: Imamo $x < a \implies$ jer je A gust u $X \implies \exists a' \in A$, $x < a' < a \implies \Phi(a') = f(a') < f(a) = \Phi(a)$.Treba jos pokazati da je $\Phi(x) \leq f(a')$: Zbog $x < a'$ (i uzlaznosti od f) je $f(a')$ gornja medja skupa $\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\}$, pa je $\sup\{f(a) \mid a \leq x, a \in A\} = \Phi(x) \leq f(a')$. Dakle $\Phi(x) \leq f(a') < f(a) = \Phi(a)$, tj $\Phi(x) < \Phi(a)$.
d) $x_1, x_2 \in X$: Imamo $x_1 < x_2 \implies$ jer je A gust u $X \implies \exists a \in A$, $x_1 < a < x_2$. Iz $x_1 < a$ zbog c) slijedi $\Phi(x_1) < \Phi(a)$. Isto tako iz $a < x_2$ zbog b) slijedi $\Phi(a) < \Phi(x_2)$. Iz posljednje dvije nejednakosti zbog tranzitivnosti relacije "$<$" slijedi $\Phi(x_1) < \Phi(x_2)$.
Dakle prva implikacija je istinita.
- Dokazimo sad drugu implikaciju: Ona ce biti ispunjena ako pokazemo da je Φ injektivno: Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Treba pokazati da je onda $\Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$. Bez smanjenja opcenitosti pretpostavimo da je $x_1 < x_2$. Tada zbog d) slijedi $\Phi(x_1) < \Phi(x_2) \implies \Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$, dakle Φ je injekcija pa vrijedi i druga implikacija.
- Posto su obje implikacije istinite to je i njihova konjukcija istinita tj. vrijedi pocetna implikacija, a time i tvrdnja T_3.
Primijetimo kako smo u ovom dijelu dokazali kako je Φ i injektivno, stoga nam preostaje jos samo pokazati:

T_4: Φ je surjekcija.

Odaberimo proizvoljni $y \in Y$. Trebamo pronaci $x \in X$ za koji je $\Phi(x) = y$.
Promotrimo skup $C = \{b \in B \mid b \leq y\}$.
[Uocimo kako je $y = \sup C$. Naime $\forall b \in C$ vrijedi $b \leq y$ pa je y gornja medja od C. Pokazimo da je y i najmanja gornja medja tj supremum: Pretpostavimo suprotno tj. da y nije supremum, nego da $\exists\, y'$ koji je supremum od C, tj $\forall b \in C$, $b \leq y' < y$. No tada jer je B gust u Y, postoji $b \in B$ takav da je $y' < b < y$. Ocito je $b \in C$ (jer je $b < y$), i $y' < b$, sto je u kontradikciji s cinjenicom da je y' supremum skupa C].
Kako je $C \subseteq B$ to jer je f izomorfizam postoji prema Def.29 $f^{-1} : B \longrightarrow A$, pa i skup $f^{-1}(C) \subseteq X$. Tvrdimo da je skup $f^{-1}(C) \subseteq X$ omedjen odozgo. Naime kako Y nema maksimuma (i) to postoji $y' \in Y$, $y < y'$. No onda jer je B gust u Y postoji $b' \in B$, $y < b' < y'$. Kako je $y < b'$, to onda za svaki $b \in C$, je $b < b'$, pa zbog uzlaznosti od f^{-1} (Def.29) vrijedi $f^{-1}(b) < f^{-1}(b')$, pa je $f^{-1}(b')$ gornja medja od $f^{-1}(C)$.
No $f^{-1}(C)$ je i neprazan jer $\forall y \in Y$, $\exists b \in B$ t.da je $b < y$. (Naime kako prema

(i) Y nema minimuma, to $\forall y \in Y$, $\exists y' \in Y$ t.da je $y' < y$, a onda zbog gustoce skupa B u Y, slijedi da postoji $b \in B$, $y' < b < y$). Sada prema (iii) slijedi da postoji $\sup f^{-1}(C) \in X$, tj $\exists x \in X$, $\boxed{x = \sup\, f^{-1}(C)\,.}$.
Tvrdimo da ce se upravo ovaj x preslikati Φ-om u y, tj. da je $\Phi(x) = \Phi\left(\sup f^{-1}(C)\right) = y = \sup C$.
Kako je $f^{-1}(C) \subseteq A$, to je $\Phi\left(f^{-1}(C)\right) = f\left(f^{-1}(C)\right) = C$, pa bi bilo dovoljno dokazati sljedecu tvrdnju $\Phi\left(\sup f^{-1}(C)\right) = \sup \Phi\left(f^{-1}(C)\right)$. Naime imali bi: $\Phi(x) = \Phi\left(\sup f^{-1}(C)\right) = \sup \Phi\left(f^{-1}(C)\right) = \sup f\left(f^{-1}(C)\right) = \sup C = y$, cime bi pokazali da je Φ i surjektivno.
- Dokazimo dakle jos da za $D \subseteq X$, vrijedi: $\Phi(\sup D) = \sup \Phi(D)$:
To cemo dokazati dokazemo li konjukciju: $\sup \Phi(D) \leq \Phi(\sup D)$ & $\sup \Phi(D) \not< \Phi(\sup D)$.
- Oznacimo $\alpha \equiv \sup D$. To znaci da je $\forall d \in D$, $d \leq \alpha$, no onda je zbog dokazane uzlaznosti od Φ (T_3), $\forall d \in D$, $\Phi(d) \leq \Phi(\alpha)$ a to znaci da je $\Phi(\alpha)$ gornja medja od $\Phi(D)$, pa slijedi: $\Phi(D) \leq \Phi(\alpha) = \Phi(\sup D)$, cime je dokazan prvi dio konjukcije.
- Pokazimo sad da $\sup \Phi(D)$ nije manji od $\Phi(\sup D)$. Pretpostavimo suprotno tj da je $\sup \Phi(D) < \Phi(\alpha)$.Kako su $\sup \Phi(D), \Phi(\sup D) \in Y$, to zbog gustoce od B u Y, postoji $b \in B$, takav da je $\sup \Phi(D) < b < \Phi(\alpha)$. No jer je Φ bijektivno to postoji $a \in A$, $\Phi(a) = b$, pa imamo: $\sup \Phi(D) < \Phi(a) < \Phi(\alpha)$, tj $\Phi(a)$ je gornja medja skupa $\Phi(D)$. No kako je Φ uzlazno to da bi bilo $\Phi(a) < \Phi(\alpha)$ mora biti $a < \alpha = \sup D \implies \exists d \in D$, $a < d \leq \alpha$. No sada zbog uzlaznosti od Φ mora biti $\Phi(a) < \Phi(d) \in f(D)$ sto je u kontradikciji s potcrtanom tvrdnjom.
Dakle obje tvrdnje trazene konjukcije su istinite, pa je takva i konjukcija, tj vrijedi $\Phi(\sup D) = \sup \Phi(D)$, cime je teorem u potpunosti dokazan. ■

Corollary 65 *Neka je X potpuno uredjen skup sa sljedecim svojstvima:*
(i) Nema ni prvog ni zadnjeg elementa
(ii) Ima gust prebrojiv podskup
(iii) Svaki neprazan odozgo omedjen podskup od X ima supremum.
Tada je $tX = \lambda$.

Proof. Kako $\mathbb{R}$ udovoljava uvjetima prethodnog teorema , izlazi da je $X \cong \mathbb{R}$, pa je $tX = t\mathbb{R} = \lambda$ ■

Dobro uredjeni skupovi

Definition 42 *Neka je X potpuno uredjen skup. Kazemo da je X* dobro uredjen *ako svaki neprazni podskup $A \subseteq X$ ima minimum.*

Example 13 *1) $\mathbb{N}$ je dobro uredjen*
2) $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ nije dobro uredjen
3) $\mathbb{Z}$ nije dobro uredjen
4) $\emptyset$ i jednoclan skup se drze dobro uredjenima.

Definition 43 *Svaki skup A za koji vrijedi* $A \cong -\mathbb{N}$, $(-\mathbb{N} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \subseteq \mathbb{Z})$ *se naziva* regresija *i vrijedi* $tA = \omega^*$.

Remark 23 *Svaki neprazan podskup A dobro uredjena skupa X je dobro uredjen.*

Proof. Da bismo pokazali da je skup A dobro uredjen, prema Def.42 treba pokazati da je potpuno uredjen i da svaki njegov neprazni podskup ima minimum:
- Jer je X dobro uredjen, on je po Def.42 i totalno uredjen, ali je onda i A kao njegov podskup totalno uredjen.
- Sad trebamo pokazati da svaki neprazni podskup $S \subseteq A$ ima minimum. Neka je $\emptyset \neq S \subseteq A$. Tada je zbog tranzitivnosti relacije "$\subseteq$ " $\emptyset \neq S \subseteq X$. No jer je X dobro uredjen svaki njegov neprazni podskup ima minimum, pa tako i S ima minimum.
Kako je $\emptyset \neq S \subseteq A$ proizvoljan i ima minimum, i A totalno uredjen, slijedi da je $A \subseteq X$ dobro uredjen. ■

Theorem 66 *Neka je X totalno uredjen skup. X je dobro uredjen* ***akko*** *ne sadrzi regresiju.*

Proof.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je X dobro uredjen. To prema definiciji znaci da svaki neprazni podskup od X ima minimum. Kako regresija nema minimuma, slijedi da X ne sadrzi regresiju.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je X totalno uredjen skup koji ne sadrzi regresiju. Trebamo pokazati da je tada X dobro uredjen.
Pp suprotno tj. da X nije dobro uredjen. To prema Def.42 znaci da postoji $A \subseteq X$, takav da je $A \neq \emptyset$ i ne postoji $\min A$. Kako je $A \neq \emptyset$ to postoji $a_1 \in A$. No kako A nema minimuma, to $\exists a_2 \in A$, $a_2 < a_1$. No iz istog razloga $\exists a_3 \in A$, $a_3 < a_2 < a_1$. Na taj nacin induktivno mozemo konstruirati skup $\{\ldots, a_3, a_2, a_1\} \subseteq X$ koji je slican skupu $\mathbb{N}$, pa je taj skup prema Def.43 regresija, tj X sadrzi regresiju. No to je kontradikcija s uvjetom da je X skup koji ne sadrzi regresiju, pa slijedi da je X dobro uredjen.

■

Corollary 67 *Neka su X i Y potpuno uredjeni i neka je* $X \cong Y$. *Tada vrijedi: ako je X dobro uredjen onda je i Y dobro uredjen.*

Proof. Neka su X i Y potpuno uredjeni i neka je $f : X \longrightarrow Y$ slicnost. Neka je X dobro uredjen. Pp suprotno tj. da tada Y nije dobro uredjen. No tada prema Def.42 znaci da postoji $Y_1 \subseteq Y$, $Y_1 \neq \emptyset$, i Y_1 nema minimuma. Kako je i $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ takodjer slicnost, imali bi da skup $f^{-1}(Y_1) \subseteq X$ takodjer nema minimuma,[33] a to je u suprotnosti s tvrdnjom da je X dobro uredjen (Def.42) tj da svaki njegov podskup ima minimum.Dakle onda je i Y dobro uredjen. $\blacksquare$

Theorem 68 *Neka je X dobro uredjen skup i $f : X \longrightarrow X$ slicnost. Tada $\forall x \in X$ vrijedi: $x \leq f(x)$.*

Proof. Pretpostavimo suprotno tj. neka $\exists x_0 \in X$ za koji je $x_0 > f(x_0)$. Neka je $A = \{x \in X \mid x > f(x)\} \subseteq X$. Vrijedi $A \neq \emptyset$ jer je barem $x_0 \in A$.Kako je X dobro uredjen, to prema Def.42 $\exists x_1 = \min A \in A$, no to znaci da je $x_1 > f(x_1)$. Kako je f slicnost to iz $f(x_1) < x_1 \implies f(f(x_1)) < f(x_1)$, pa kako je $f(x_1) \in X$, to je onda i $f(x_1) \in A$, sto je uz $f(x_1) < x_1$, kontradikcija s $x_1 = \min A$. Dakle vrijedi tvrdnja teorema. $\blacksquare$

Definition 44 *Neka je X dobro uredjen skup i $a \in X$. Skup $X_a = \{x \in X \mid x < a\}$ naziva se* pocetni komad *skupa X.*

Remark 24 *Ako je $x_0 = \min X$, onda je $X_{x_0} = \emptyset$*

Theorem 69 *Ne postoji slicno preslikavanje dobro uredjenog skupa na njegov pocetni komad*

Proof. Pp. suprotno tj neka postoji dobro uredjen skup X, njegov pocetni komad X_a i slicno preslikavanje $f : X \longrightarrow X_a$. No tada je posebno za $a \in X$ ispunjeno $f(a) \in X_a$. No kako je $X_a = \{x \in X \mid x < a\}$, to je onda $f(a) < a$. No to je onda u kontradikciji s Tm.68. $\boxed{?}$ [34] $\blacksquare$

Theorem 70 *Neka je X dobro uredjen skup te X_a i X_b razliciti pocetni komadi od X. Tada $X_a \ncong X_b$*

Proof. Primijetimo najprije da su prema Nap.23 X_a i X_b dobro uredjeni. Kako je $X_a \neq X_b$, slijedi $a \neq b$. No kako su $a, b \in X$ koji je potpuno uredjen (jer je dobro uredjen), to prema Def.27 vrijedi: ili $a \leq b$ ili $b \leq a$, tj zbog $a \neq b$, vrijedi: ili $a < b$ ili $b < a$.
Pp da je $a < b$. Tada je $a \in X_b$, pa je X_a pocetni komad dobro uredjenog skupa X_b. Prema Tm.69 slijedi da ne postoji slicnost izmedju X_b i X_a tj $X_a \ncong X_b$.
Analogno ako je $b < a$.
Slijedi $X_a \ncong X_b$. $\blacksquare$

Theorem 71 *Postoji najvise jedno slicno preslikavanje dobro uredjenog skupa X na dobro uredjen skup Y.*[35]

---

[33] Prema Tm.61 sv.(iii) slicnost preslikava minimum domene u minimum kodomene. Kako zbog dobre uredjenosti od X mora postojati minimum od svakog nepraznog podskupa, to postoji $\min f^{-1}(Y_1) \subseteq X$, pa njegova praslika mora biti $\min Y_1$, a on ne postoji.

[34] No Tm.68 tvrdi za slicno preslikavanje $f' : X \longrightarrow X$! a ovdje je rijec o slicnosti $f : X \longrightarrow X_a$ $\boxed{?}$

[35] Primijetimo da kod totalno uredjenih skupova X i Y, mogu postojati razna slicna preslikavanja skupa X na skup Y. Npr. postoje razlicita slicna preslikavanja $\forall a \in \mathbb{R}$, $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = x + a$.

Proof. Pretpostavimo da postoje slicna preslikavanja $f, g : X \longrightarrow Y$. Kako je g slicnost (=uzlazni izomorfizam, vidi Nap.18) to prema Def.29 postoji slicnost $g^{-1} : Y \longrightarrow X$, pa je i $g^{-1} \circ f : X \longrightarrow X$ zbog Nap.16 i Nap.5 takodjer uzlazni izomorfizam tj slicnost. Prema Tm.68 onda $\forall x \in X$ vrijedi $x \leq \left(g^{-1} \circ f\right)(x) \Longrightarrow$ zbog uzlaznosti od $g \Longrightarrow g(x) \leq \left(g\left(g^{-1} \circ f\right)\right)(x) \Longrightarrow g(x) \leq f(x)$.
Analogno se pokaze da je $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$.
Zbog antisimetricnosti relacije "$\leq$ "(Def.27) slijedi: $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$, tj $f = g$. ■

Corollary 72 *Jedino slicno preslikavanje dobro uredjenog skupa X na samog sebe je identiteta*

Proof. Identiteta je uzlazna, bijektivna, te je (jer je X totalno uredjen) prema Tm.55 i slicno preslikavanje, pa tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema. ■

Theorem 73 ***PRINCIP TRANSFINITNE INDUKCIJE:*** *Neka je S dobro uredjen skup i $A \subseteq S$ podskup sa svojstvom: $(\forall x \in S)\ S_x \subseteq A \Longrightarrow x \in A$. Tada je $A = S$.*[36]

Proof. Pp suprotno tj. neka je uz navedene uvjete $A \neq S$ odnosno neka je (zbog $A \subseteq S$) $A \subset S$. Tada je $S \backslash A \neq \emptyset$, i $S \backslash A \subseteq S$, pa jer je prema Nap.23 $S \backslash A$ dobro uredjen, to prema Def.42 znaci da $\exists x_0 = \min S \backslash A$. Pogledajmo onda sto dobijamo iz uvjeta $S_x \subseteq A \Longrightarrow x \in A$, za svaki $x \in X$ koji posebno mora vrijediti i za $x \equiv x_0$: Imamo $S_{x_0} \subseteq A \Longrightarrow x_0 \in A$. No to je u suprotnosti s $x_0 = \min S \backslash A$ tj $x_0 \notin A$, pa slijedi $A = S$. ■

Definition 45 *Neka je X dobro uredjen skup.* Rednim brojem (ordinalom) *skupa X nazivamo redni tip skupa X.*

Example 14 *n, ω - redni brojevi*
ω^*, η, λ - nisu redni brojevi

Definition 46 *Neka su α i β redni brojevi. Kazemo da je α* manji od *β i pisemo $\alpha < \beta$, ako je $\alpha = tA$, $\beta = tB$ i A je slican nekom pocetnom komadu od B.*

Remark 25 *Ako su α, β, γ redni brojevi te $\alpha < \beta$ & $\beta < \gamma$ onda vrijedi $\alpha < \gamma$.*

Remark 26 *Za svaka dva redna broja α i β vrijedi tocno jedna od relacija: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$, tj ne mogu vrijediti dvije relacije istodobno.*[37]

Definirajmo jos: $\alpha \leq \beta \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$

[36] Poopcenje principa matematicke indukcije (koji vrijedi za skup $\mathbb{N}$ ili skup ω) na bilo koji dobro uredjen skup.

[37] Nije jasno "mora" li postojati odnos. Ako mora onda je bilo koji skup rednih brojeva totalno uredjen, (pa u sljedecem teoremu to mogli i iskoristiti), no to bi trebalo i dokazati. Tek u Tm. se sturo govori o tom, tj poziva se na ovu nedokazanu napomenu. Ova bi napomena morala slijediti iz Teorema: "Za svaka dva pocetna komada (segmentna skupa)X i Y vrijedi tocno jedna od mogucnosti:1)$X = Y$ 2)$X \subset Y$ 3)$Y \subset X$, (tj svaka dva pocetna skupa su usporediva)", koji bi takodjer trebalo dokazati.

Definition 47 *Neka je α redni broj. Oznacimo sa $W(\alpha) = \{\beta \mid \beta$ redni broj manji od $\alpha\}$.*

Stavimo li za $\emptyset$ da je $t\emptyset = 0$.
$W(0) = \emptyset$
$W(1) = \{0\}$
$W(2) = \{0, 1\}$
$W(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
$W(\omega) = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$

Theorem 74 *Neka je α redni broj. Tada je $W(\alpha)$ dobro uredjen skup i $tW(\alpha) = \alpha$.*

Proof. Kako je α redni broj, to prema Def.45 znaci da je α redni tip nekog dobro uredjenog skupa. Neka je A taj dobro uredjeni skup i neka je dakle $tA = \alpha$. Trebamo dokazati da je $W(\alpha)$ dobro uredjen. Prema Kor.67 treba pokazati da je $W(\alpha)$ potpuno uredjen i da je $W(\alpha) \cong A$.

Dokazimo da je $W(\alpha)$ potpuno uredjen[38]. Prema Def.27 treba pokazati da su bilo koja njegova dva elementa usporedivi. Neka je $\beta \in W(\alpha)$ proizvoljan, tada je $\beta < \alpha$. Prema Def.46 to znaci da je β redni tip nekog pocetnog komada od dobro uredjenog skupa A, tj postoji $a \in A$ takav da je $\beta = tA_a$, $\forall \beta \in W(\alpha)$. No kako su svi pocetni komadi nekog skupa usporedivi [39] to su i svi $\beta \in W(\alpha)$ usporedivi, tj $W(\alpha)$ je totalno uredjen skup.

Dokazimo sad da je $W(\alpha) \cong A$. Definirajmo preslikavanje $f : W(\alpha) \longrightarrow A$ sa $f(\beta) = b$, gdje je $\beta = tA_b$. f je slicno preslikavanje pa vrijedi $W(\alpha) \cong A$, a zbog Def.34 je onda $tW(\alpha) = tA = \alpha$. ■

Theorem 75 *Svaki skup rednih brojeva je dobro uredjen.*

Proof. Oznacimo sa A proizvoljni skup rednih brojeva. Trebamo pokazati da je A dobro uredjen, tj prema Def.42 da je totalno uredjen i da svaki njegov neprazni podskup ima minimum.
- Prema Nap.26 izlazi da je A totalno uredjen.
- Odaberimo neprazan $B \subseteq A$, tj postoji redni broj $\beta \in B$. Ako je $\beta = \min B$ tvrdnja je dokazana. Ako β nije minimum od B, znaci da skup $W(\beta) \cap B$ nije prazan (jer je $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha$ redni broj manji od $\beta\}$). No $W(\beta) \cap B$ je dakle neprazni podskup od $W(\beta)$ koji je prema Tm.74 dobro uredjen pa ima minimum.

Dakle svaki skup rednih brojeva je totalno uredjen, a kako za svaki skup rednih brojeva postoji neprazan podskup B ili $W(\beta) \cap B$, $(\beta \in B)$, koji ima minimum, slijedi da je svaki skup rednih brojeva dobro uredjen. ■

Theorem 76 *Uredjena suma S dobro uredjenih skupova B_λ, $\lambda \in A$, po dobro uredjenom skupu A, je dobro uredjen skup.*

[38] Kako smo pravilo trihotomije (Nap.26) uzeli "zdravo za gotovo" ne bi li bilo jednostavnije ovdje ga odmah iskoristiti?

[39] Intuitivno je jasno jer su usporedivi svi elementi tog dobro (pa i totalno) uredjenog skupa, no trebalo bi to dokazati (vidi footnote iz Nap.26)

Proof. Prisjetimo se najprije definicije redne unije (Def.38). Dakle uredjena suma S dobro uredjenih skupova B_λ je zapravo: redna unija sustava $\{B_\lambda \mid \lambda \in A\}$ medjusobno disjunktnih dobro uredjenih skupova, koja je po Def.38 totalno uredjen skup (jer su svi B_λ dobro, a time i totalno uredjeni). Dodatni uvjet ovog teorema je i da je skup A, indeksa λ, dobro uredjen skup. Da bi pokazali da je S i dobro uredjen, trebamo prema Def.42 jos pokazati da svaki neprazni podskup od S ima minimum:

Neka je dakle $S = \cup_{\lambda\in A} B_\lambda$ (kako rekosmo i totalno) uredjena suma. Odaberimo proizvoljni neprazni podskup $T \subseteq S$. Trebamo pokazati da T ima minimum. Kako je $T \neq \emptyset$ to je sigurno $T \cap B_\lambda \neq \emptyset$ za neki (ili neke) $\lambda \in A$. Mozemo dakle formirati neprazni skup $\{\lambda \in A \mid T \cap B_\lambda \neq \emptyset\} \subseteq A$. Kako je A dobro uredjen to postoji $\lambda_0 = \min\{\lambda \in A \mid T \cap B_\lambda \neq \emptyset\}$. Promotrimo sada skup $T \cap B_{\lambda_0}$, koji je neprazni podskup od B_{λ_0}, pa kako je B_{λ_0} dobro uredjen to postoji $\min T \cap B_{\lambda_0} = b$. Tvrdimo da je $b = \min T$, cime ce teorem biti dokazan: Tvrdimo dakle da je $b \leq t$, $\forall t \in T$.
Odaberimo proizvoljni $t \in T$. Kako je $T \subseteq S$, to je $t \in T \cap B_\lambda$ za neki $\lambda \in A$. Sad imamo dva slucaja:
a) Ako je $\lambda = \lambda_0$: tada je $t \in T \cap B_{\lambda_0}$, a kako je $b = \min T \cap B_{\lambda_0}$ to je dakle ispunjeno $b \leq t$ u ovom slucaju, tj $b = \min T$.
b) Ako je $\lambda \neq \lambda_0$: tada je sigurno $\lambda_0 < \lambda$ (jer je $\lambda_0 = \min\{\lambda \in A \mid T \cap B_\lambda \neq \emptyset\}$), i $t \in T \cap B_\lambda$, tj.$t \in B_\lambda$. No tada je zbog uredjaja u skupu S (vidi Def.38) svaki element skupa B_{λ_0} manji od svakog elementa iz ostalih skupova B_λ, tj za $b \in B_{\lambda_0}$ i $t \in B_{\lambda_0}$ je ispunjenȯ $b < t$, dakle i u ovom slucaju imamo da je $b = \min T$.

Dakle doista je $b = \min T$, cime je dokazano da je S dobro uredjen. ■

- Definirajmo sada redni broj dobro uredjene sume S:
  Neka je $tA = \alpha$, $tB_\lambda = \beta_\lambda$.
  $tS = t(\cup_{\lambda\in A} B_\lambda) = \sum_{\lambda\in A} \beta_\lambda = \sum_{\boxed{\lambda<\alpha}} \beta_\lambda = \gamma$.

  γ se naziva sumom rednih brojeva β_λ po svim rednim brojevima koji su manji od α.
- $\forall \lambda \in A$ vrijedi $\beta_\lambda \leq \gamma$.

Theorem 77 *Za svaki skup X rednih brojeva postoji redni broj koji je veci od svakog rednog broja iz tog skupa.*

Proof. Prema prethodnom, od rednih brojeva iz skupa X mozemo napraviti njihovu sumu i neka je ona jednaka γ. Prema gore potcrtanom imamo da je γ veci ili jednak od svakog od rednih brojeva iz X. Trazeni redni broj koji je veci od svakog iz X je onda $\gamma + 1$. ■

Remark 27 ***BURALI-FORTIJEV PARADOKS:*** *Klasa W svih rednih brojeva nije skup.*

Proof. Pp suprotno tj da je W skup svih rednih brojeva. Prema Tm.75 W je dobro uredjen, pa neka je redni broj $\alpha = tW$. No kako je W skup svih rednih brojeva, to je onda i $\alpha \in W$. No prema Tm.74 vrijedi da je $\alpha = tW(\alpha)$. No onda iz posljednje dvije jednakosti slijedi prema Def.34 da je $W \cong W(\alpha)$. No prema Def.44 (i Def.47) $W(\alpha)$ je pocetni komad od W (jer je $\alpha \in W$), sto znaci da je W slican svom pocetnom komadu, a to je u kontradikciji s Tm.69. Dakle svi redni brojevi ne tvore skup ■

Definition 48 *Neka je A neki skup rednih brojeva. Mogu nastupiti sljedeci slucajevi:*

(i) A ima najveci element β.

Tada je $\beta + 1$ veci od svakog elementa iz A tj. β je neposredni prethodnik *od $\beta + 1$. Mozemo pisati i $\langle \beta, \beta + 1 \rangle = \emptyset$. Kazemo da je $\beta + 1$ redni broj* prve vrste. *Opcenito α se naziva rednim brojem prve vrste ako ima neposrednog prethodnika β, tj ako je $\alpha = \beta + 1$.*

(ii) A nema najveci element.

Tada najmanji redni broj β, koji je veci od svakog rednog broja iz A, ima svojstvo da $\forall \alpha \in A$, $\langle \alpha, \beta \rangle \neq \emptyset$.

Taj najmanji redni broj koji je veci od svakog rednog broja iz A se naziva redni broj druge vrste *ili* granicni redni broj.

Example 15 - n, $\omega + 5$ *- redni brojevi prve vrste.*

- ω *- redni broj druge vrste.*