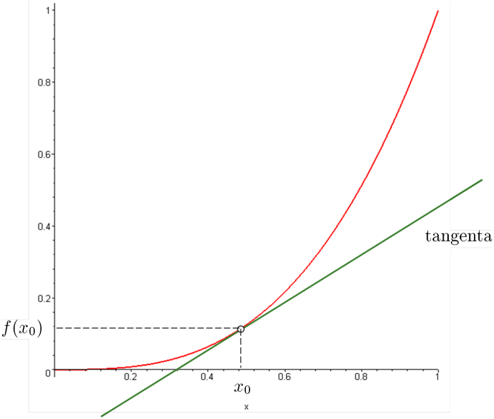
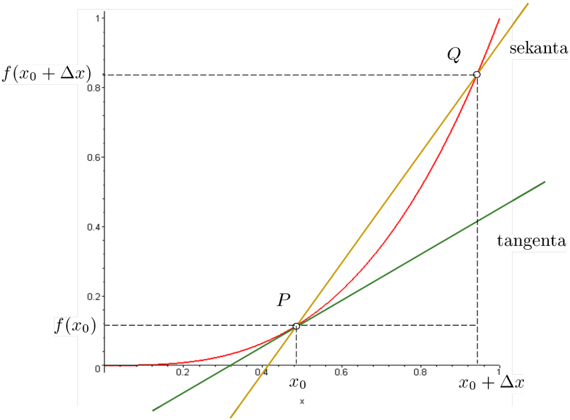
18. studenog 2014.

Problem tangente

Kako možemo odrediti tangentu na funkciju $y = f(x)$ u zadanoj točki $(x_0, f(x_0))$?



Promotrimo sekantu kroz dvije točke na grafu funkcije $y = f(x)$.



Definicija

Derivacija funkcije f u točki x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}, \tag{1}$$

ako limes postoji. Ako limes postoji tada kažemo da je f diferencijabilna (ili derivabilna) u točki x_0.

Za derivaciju koristimo oznake

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{ili} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}. \tag{2}$$

Derivaciju također možemo zapisati u obliku

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definicija

Derivacija funkcije f u točki x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}, \tag{1}$$

ako limes postoji. Ako limes postoji tada kažemo da je f diferencijabilna (ili derivabilna) u točki x_0.

Za derivaciju koristimo oznake

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \text{ili} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}. \tag{2}$$

Derivaciju također možemo zapisati u obliku

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Primjeri

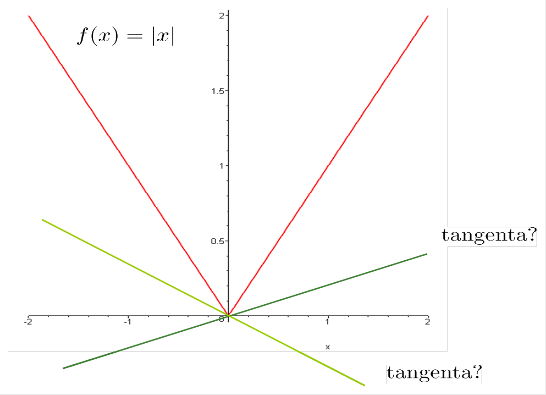
Odredite derivacije funkcija

- $f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$,
- $f(x) = ax + b$,
- $g(x) = x^2$,
- $h(x) = \sqrt{x}$.

Teorem (∗)

Ako je funkcija f derivabilna u x_0, tada je f neprekidna u x_0.

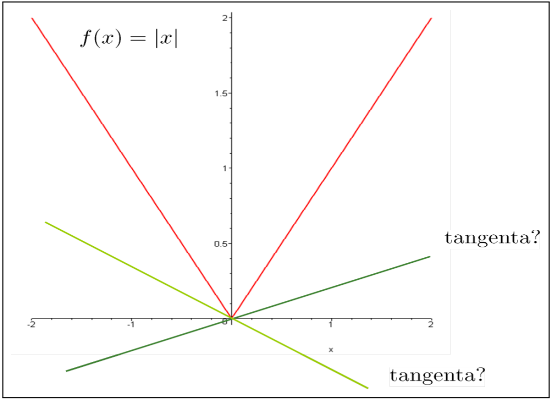
Neprekidnost funkcije je nužan, ali nije dovoljan uvjet za egistenciju derivacije. Funkcija $y = |x|$ je neprekidna svugdje, ali nema derivaciju u $x = 0$.



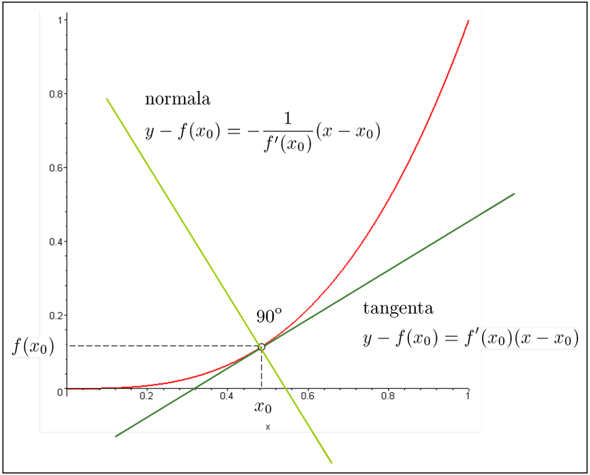
Teorem (∗)

Ako je funkcija f derivabilna u x_0, tada je f neprekidna u x_0.

Neprekidnost funkcije je nužan, ali nije dovoljan uvjet za egistenciju derivacije. Funkcija $y = |x|$ je neprekidna svugdje, ali nema derivaciju u $x = 0$.



Ako je poznata jednadžba tangente, tada možemo odrediti i normalu na krivulju $y = f(x)$ u zadanoj točki.



Teorem (*)

Neka su funkcije f i g derivabilne u točki x. Tada vrijedi

- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, (Leibnizovo pravilo)
- $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{ako je} \quad g(x)\neq 0. \tag{3}$$

Derivacija cjelobrojne potencije

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Koristeći pravila deriviranja i pravilo za derivaciju potencije možemo odrediti derivaciju bilo kojeg polinoma ili racionalne funkcije.

Derivacije trigonometrijskih funkcija

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{ctg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{6}$$

Derivacije elementarnih funkcija

Derivacija cjelobrojne potencije

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Koristeći pravila deriviranja i pravilo za derivaciju potencije možemo odrediti derivaciju bilo kojeg polinoma ili racionalne funkcije.

Derivacije trigonometrijskih funkcija

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{ctg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{6}$$

Derivacije elementarnih funkcija

Derivacija cjelobrojne potencije

$$\frac{d}{dx} x^n = n\,x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Koristeći pravila deriviranja i pravilo za derivaciju potencije možemo odrediti derivaciju bilo kojeg polinoma ili racionalne funkcije.

Derivacije trigonometrijskih funkcija

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{ctg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \tag{6}$$

Teorem (derivacija kompozicije funkcija) (∗)

Neka je f derivabilna u točki x_0 i neka je g derivabilna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ derivabilna u točki x_0, i vrijedi

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0). \tag{7}$$

U posebnom slučaju

$$\frac{d}{dx}\big[f(x)\big]^n = n\big[f(x)\big]^{n-1} f'(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Teorem (derivacija inverzne funkcije) (∗)

Pretpostavimo da je $f : (a, b) \to (c, d)$ bijekcija i diferencijabilna na (a, b). Ako je $f'(x_0) \neq 0$ u točki $x_0 \in (a, b)$, tada je f^{-1} diferencijabilna u $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{9}$$

Teorem (derivacija kompozicije funkcija) (∗)

Neka je f derivabilna u točki x_0 i neka je g derivabilna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ derivabilna u točki x_0, i vrijedi

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0). \tag{7}$$

U posebnom slučaju

$$\frac{d}{dx}\big[f(x)\big]^n = n\big[f(x)\big]^{n-1} f'(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Teorem (derivacija inverzne funkcije) (∗)

Pretpostavimo da je $f : (a,b) \to (c,d)$ bijekcija i diferencijabilna na (a,b). Ako je $f'(x_0) \neq 0$ u točki $x_0 \in (a,b)$, tada je f^{-1} diferencijabilna u $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{9}$$

Teorem (derivacija kompozicije funkcija) (∗)

Neka je f derivabilna u točki x_0 i neka je g derivabilna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ derivabilna u točki x_0, i vrijedi

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0). \tag{7}$$

U posebnom slučaju

$$\frac{d}{dx}\big[f(x)\big]^n = n\big[f(x)\big]^{n-1} f'(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

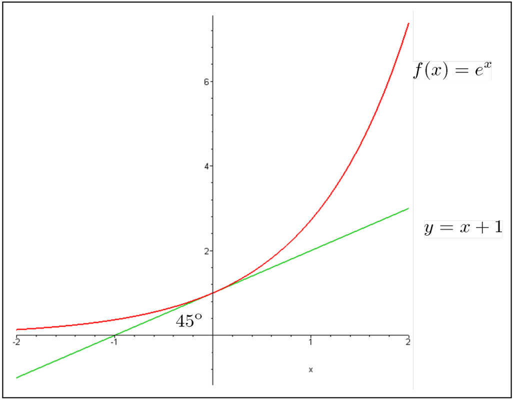
Teorem (derivacija inverzne funkcije) (∗)

Pretpostavimo da je $f : (a, b) \to (c, d)$ bijekcija i diferencijabilna na (a, b). Ako je $f'(x_0) \neq 0$ u točki $x_0 \in (a, b)$, tada je f^{-1} diferencijabilna u $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{9}$$

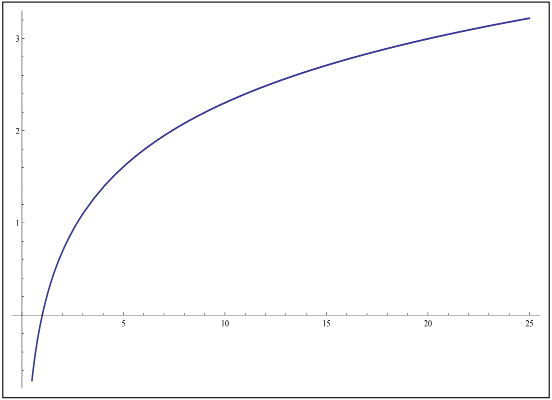
Derivacija eksponencijalne funkcije

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad e \approx 2.71828 \quad \text{Eulerov broj} \tag{10}$$



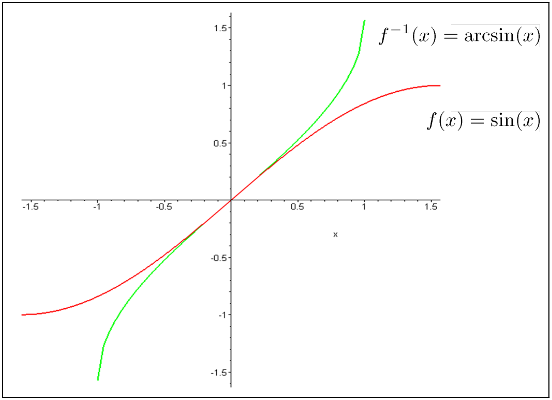
Derivacija logaritamske funkcije

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \tag{11}$$



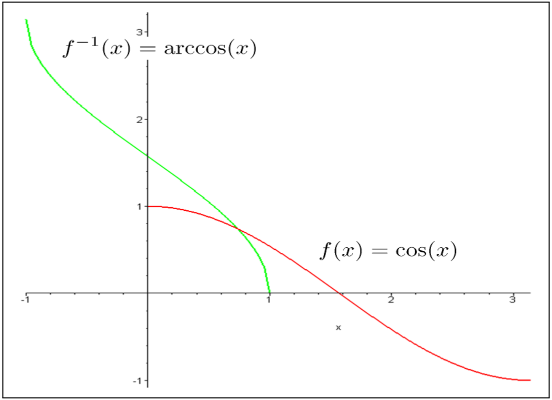
Derivacija arkus sinus funkcije

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \tag{12}$$



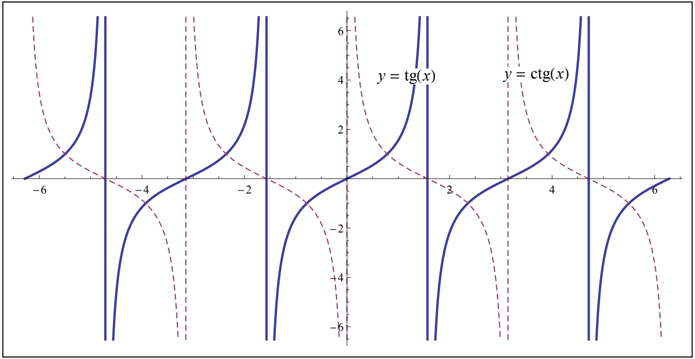
Derivacija arkus kosinus funkcije

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \tag{13}$$



Arkus tanges i arkus kotanges funkcije

$y = \mathrm{tg}(x)$, $y = \mathrm{ctg}(x)$

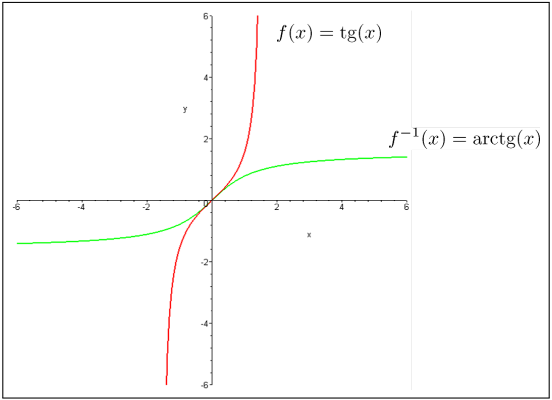


Tanges i kotanges su periodične funkcije perioda π:

$$\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x), \quad \mathrm{ctg}(x+\pi) = \mathrm{ctg}(x) \tag{14}$$

Derivacija arkus tanges funkcije

$$\frac{d}{dx}\text{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{15}$$



Derivacija arkus kotanges funkcije

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg}(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{16}$$