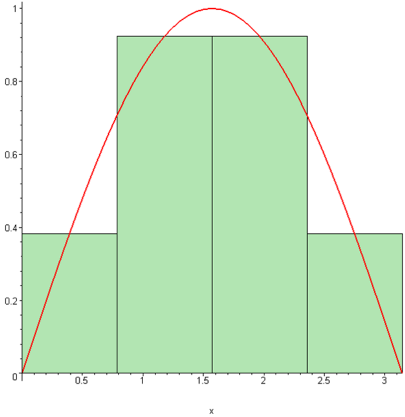
Odredjeni integral

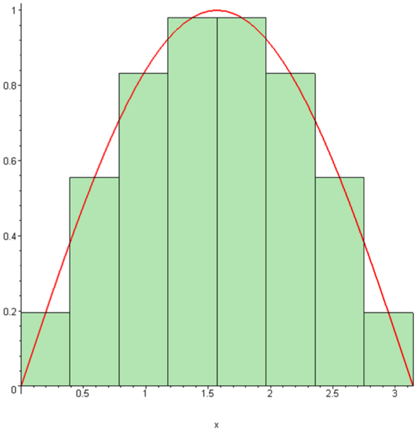
27. siječnja 2015.

Problem površine

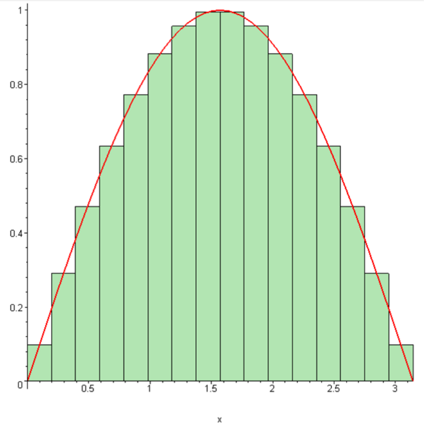
Kako možemo odrediti površinu lika omedjenog s x-osi i krivuljom $y = f(x)$?



Slika : Aproksimacija površine s 4 pravokutnika.



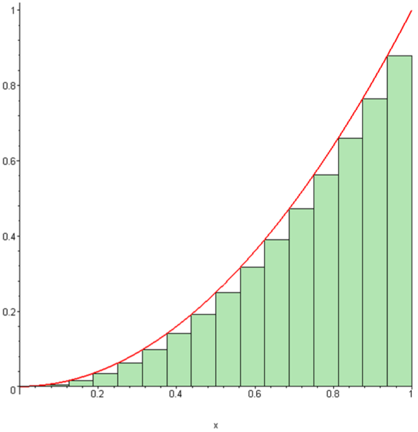
Slika : Aproksimacija površine s 8 pravokutnika.



Slika : Aproksimacija površine sa 16 pravokutnika.

Primjer

Odredite površinu ispod krivulje $y = x^2$, $x \in [0, 1]$.



Slika : Aproksimacija površine sa 16 pravokutnika.

Neka je f ograničena funkcija na $[a, b]$. Integral funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo u nekoliko koraka na sljedeći način.

(1) Particija intervala $[a, b]$ je skup točaka P:

$$P : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

Norma particije P je duljina najvećeg podintervala:

$$\|P\| = \max_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{2}$$

(2) Neka su

$$M_i = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \tag{3}$$

maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije f na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

(3) Definirajmo

$$G(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \quad \text{gornja integralna suma,} \tag{4}$$

$$D(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \quad \text{donja integralna suma.} \tag{5}$$

Neka je f ograničena funkcija na $[a, b]$. Integral funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo u nekoliko koraka na sljedeći način.

(1) Particija intervala $[a, b]$ je skup točaka P:

$$P : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

Norma particije P je duljina najvećeg podintervala:

$$\|P\| = \max_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{2}$$

(2) Neka su

$$M_i = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \tag{3}$$

maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije f na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

(3) Definirajmo

$$G(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \quad \text{gornja integralna suma,} \tag{4}$$

$$D(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \quad \text{donja integralna suma.} \tag{5}$$

Riemannov integral

Neka je f ograničena funkcija na $[a, b]$. Integral funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo u nekoliko koraka na sljedeći način.

(1) Particija intervala $[a, b]$ je skup točaka P:

$$P : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

Norma particije P je duljina najvećeg podintervala:

$$\|P\| = \max_i \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \tag{2}$$

(2) Neka su

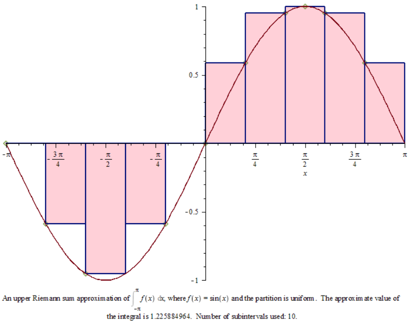
$$M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \tag{3}$$

maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije f na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

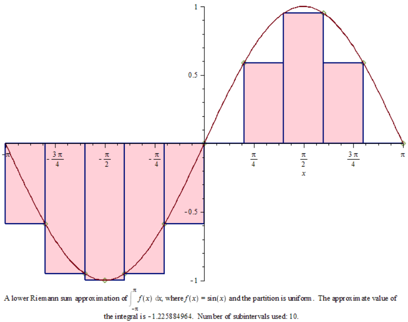
(3) Definirajmo

$$G(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \quad \text{gornja integralna suma,} \tag{4}$$

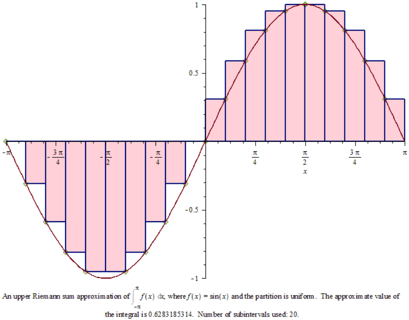
$$D(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \quad \text{donja integralna suma.} \tag{5}$$



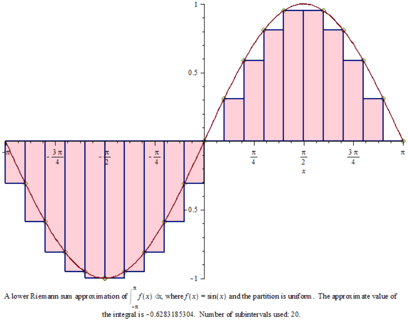
(a) Gornja Riemannova suma, $n = 10$



(b) Donja Riemannova suma, $n = 10$



(c) Gornja Riemannova suma, $n = 20$



(d) Donja Riemannova suma, $n = 20$

Definicija

Ako postoji limes

$$I^* = \lim_{\|P\| \to 0} G(f, P), \tag{6}$$

tada I^* zovemo gornji integral funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Slično definiramo donji integral kao limes

$$I_* = \lim_{\|P\| \to 0} D(f, P). \tag{7}$$

Definicija (Riemannov integral)

Kažemo da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ u Riemannovom smislu ako je $I_* = I^*$.
Riemannov integral označavamo sa

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

- a donja granica integracije, b gornja granica integracije
- $f(x)$ podintegralna funkcija

Definicija

Ako postoji limes

$$I^* = \lim_{\|P\| \to 0} G(f, P), \tag{6}$$

tada I^* zovemo gornji integral funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Slično definiramo donji integral kao limes

$$I_* = \lim_{\|P\| \to 0} D(f, P). \tag{7}$$

Definicija (Riemannov integral)

Kažemo da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ u Riemannovom smislu ako je $I_* = I^*$.
Riemannov integral označavamo sa

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

- a donja granica integracije, b gornja granica integracije
- $f(x)$ podintegralna funkcija

Definicija

Ako postoji limes

$$I^* = \lim_{\|P\| \to 0} G(f, P), \tag{6}$$

tada I^* zovemo gornji integral funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Slično definiramo donji integral kao limes

$$I_* = \lim_{\|P\| \to 0} D(f, P). \tag{7}$$

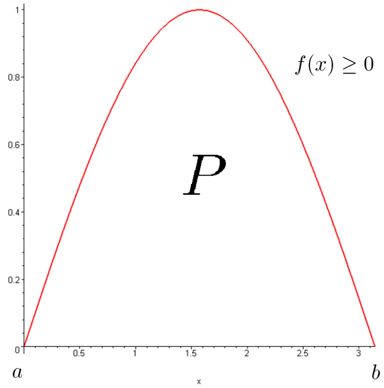
Definicija (Riemannov integral)

Kažemo da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ u Riemannovom smislu ako je $I_* = I^*$.
Riemannov integral označavamo sa

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

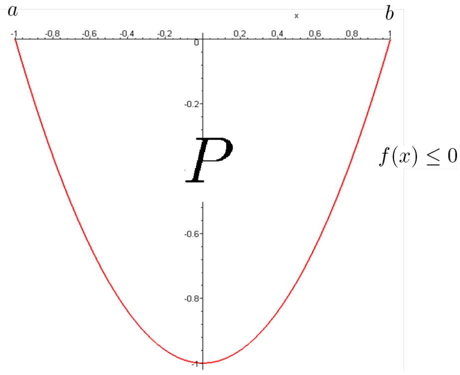
- a donja granica integracije, b gornja granica integracije
- $f(x)$ podintegralna funkcija

$$\int_a^b f(x)dx = P$$



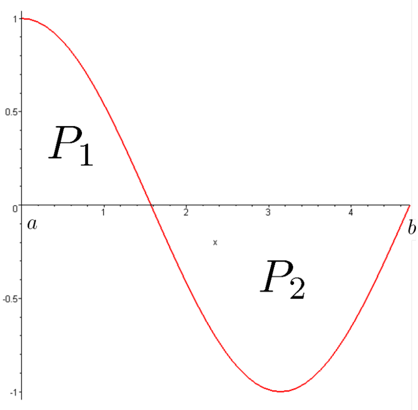
Slika : Riemannov integral daje pozitivnu površinu $P > 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = -P$$



Slika : Riemannov integral daje površinu s negativnim predznakom $-P < 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = P_1 - P_2$$



Slika : Riemannov integral daje razliku površina $P_1 - P_2$.

Primjer

Pokažite da je

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}. \tag{9}$$

Primjer

Pokažite da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ je iracionalan,} \\ 0, & x \text{ je racionalan} \end{cases} \tag{10}$$

nije integrabilna u Riemannovom smislu.

Primjer

Pokažite da je

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}. \tag{9}$$

Primjer

Pokažite da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ je iracionalan,} \\ 0, & x \text{ je racionalan} \end{cases} \tag{10}$$

nije integrabilna u Riemannovom smislu.

- Za svaki $c \in (a, b)$ vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{11}$$

- Ako je $a > b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)dx. \tag{12}$$

- Takodjer definiramo

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{13}$$

Za koju klasu funkcija postoji Riemannov integral $\int_a^b f(x)dx$?

Teorem

Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Mož se pokazati da vrijedi općenitiji rezultat koji uključuje funkcije s prekidima.

Teorem

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omedjena, i neprekidna na skupu $[a, b] \setminus S$ gdje je S prebrojiv skup, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Primjer

Odredite integral funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right] \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{14}$$

Za koju klasu funkcija postoji Riemannov integral $\int_a^b f(x)dx$?

Teorem

Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Mož se pokazati da vrijedi općenitiji rezultat koji uključuje funkcije s prekidima.

Teorem

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omedjena, i neprekidna na skupu $[a, b] \setminus S$ gdje je S prebrojiv skup, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Primjer

Odredite integral funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{14}$$

Za koju klasu funkcija postoji Riemannov integral $\int_a^b f(x)dx$?

Teorem

Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Mož se pokazati da vrijedi općenitiji rezultat koji uključuje funkcije s prekidima.

Teorem

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omedjena, i neprekidna na skupu $[a, b] \setminus S$ gdje je S prebrojiv skup, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Primjer

Odredite integral funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right] \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{14}$$

Za koju klasu funkcija postoji Riemannov integral $\int_a^b f(x)dx$?

Teorem

Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Mož se pokazati da vrijedi općenitiji rezultat koji uključuje funkcije s prekidima.

Teorem

Ako je funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omedjena, i neprekidna na skupu $[a, b] \setminus S$ gdje je S prebrojiv skup, tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Primjer

Odredite integral funkcije $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}}\right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{14}$$

Teorem (Newton-Leibnizova formula)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, i neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{15}$$

Teorem

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a, b]$, tada odredjeni integral ima slijedeća svojstva:

(i) (linearnost)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx, \tag{16}$$

(ii) (monotonost)

$$f(x) \leq g(x) \quad x \in [a, b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx, \tag{17}$$

(iii) (nejednakost trokuta)

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{18}$$

Teorem (Newton-Leibnizova formula)

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, i neka je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{15}$$

Teorem

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a,b]$, tada odredjeni integral ima slijedeća svojstva:

(i) (linearnost)

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx, \tag{16}$$

(ii) (monotonost)

$$f(x) \leq g(x) \quad x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx, \tag{17}$$

(iii) (nejednakost trokuta)

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{18}$$

Osnovni teorem integralnog računa

Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada za svaku točku $x \in (a,b)$ vrijedi

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{19}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{je primitivna funkcija od } f(x)$$

Teorem srednje vrijednosti

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji točka $c \in [a,b]$ takva da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{20}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{srednja vrijednost funkcije } f \text{ na } [a,b] \tag{21}$$

Osnovni teorem integralnog računa

Ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada za svaku točku $x \in (a,b)$ vrijedi

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{19}$$

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{je primitivna funkcija od } f(x)$$

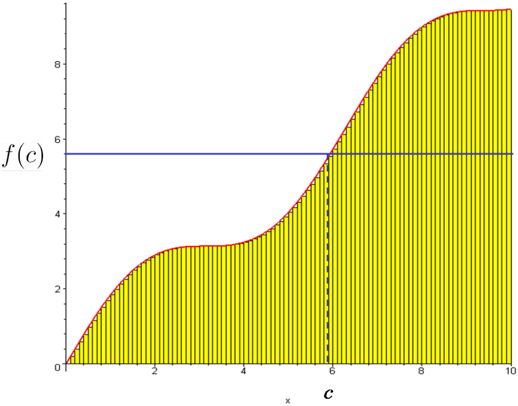
Teorem srednje vrijednosti

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji točka $c \in [a,b]$ takva da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{20}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{srednja vrijednost funkcije } f \text{ na } [a,b] \tag{21}$$

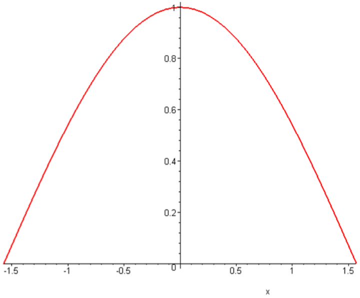
Geometrijsko značenje teorema srednje vrijednosti



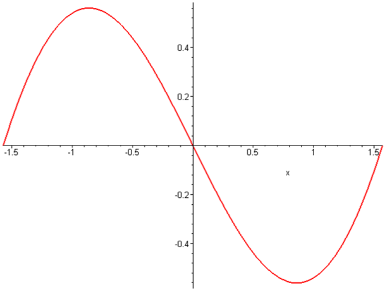
Slika : Površina pravokutnika jednaka je površini ispod krivulje.

$$P_{pravokutnik} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Integral parne i neparne funkcije



(a) Parna funkcija



(b) Neparna funkcija

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Pravilo suspstitucije za određeni integral

Ako g ima neprekidnu derivaciju na $[a, b]$ i ako je f neprekidna na skupu $g([a, b])$, tada je

$$\int_a^b f(x)g\prime(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \tag{22}$$

Supstitucija: $u = g(x)$

Parcijalna integracija za određeni integral

Ako f i g imaju neprekidne derivacije na $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{23}$$

Pravilo suspstitucije za određeni integral

Ako g ima neprekidnu derivaciju na $[a, b]$ i ako je f neprekidna na skupu $g([a, b])$, tada je

$$\int_a^b f(x)g\prime(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \tag{22}$$

Supstitucija: $u = g(x)$

Parcijalna integracija za određeni integral

Ako f i g imaju neprekidne derivacije na $[a, b]$, tada vrijedi

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{23}$$

Nepravi integrali

Nepravi integrali su integrali su kod kojih

- su jedna ili obje granice integracije beskonačne,
- funkcija ima singularitet u području integracije.

Ako su granice integracije beskonačne, tada definiramo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \quad \text{Cauchyeva glavna vrijednost integrala.}$$

Ako limes postoji, kažemo da nepravi integral konvergira. U protivnom kažemo da divergira.

Nepravi integrali

Nepravi integrali su integrali su kod kojih

- su jedna ili obje granice integracije beskonačne,
- funkcija ima singularitet u području integracije.

Ako su granice integracije beskonačne, tada definiramo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \quad \text{Cauchyeva glavna vrijednost integrala.}$$

Ako limes postoji, kažemo da nepravi integral konvergira. U protivnom kažemo da divergira.

Nepravi integrali su integrali su kod kojih

- su jedna ili obje granice integracije beskonačne,
- funkcija ima singularitet u području integracije.

Ako su granice integracije beskonačne, tada definiramo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \quad \text{Cauchyeva glavna vrijednost integrala.}$$

Ako limes postoji, kažemo da nepravi integral konvergira. U protivnom kažemo da divergira.

Nepravi integrali su integrali su kod kojih

- su jedna ili obje granice integracije beskonačne,
- funkcija ima singularitet u području integracije.

Ako su granice integracije beskonačne, tada definiramo

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \quad \text{Cauchyeva glavna vrijednost integrala.}$$

Ako limes postoji, kažemo da nepravi integral konvergira. U protivnom kažemo da divergira.

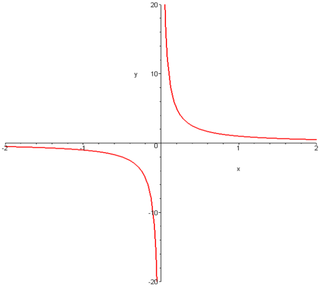
Primjer

Odredite neprave integrale

$$(a)\ \int_0^\infty e^{-x}dx, \qquad (b)\ \int_0^\infty \sin(x)dx, \qquad (c)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Kažemo da funkcija $f(x)$ ima singularitet u točki $x = c$ ako je

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty.$$



Slika : Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ima singularitet u točki $x = 0$.

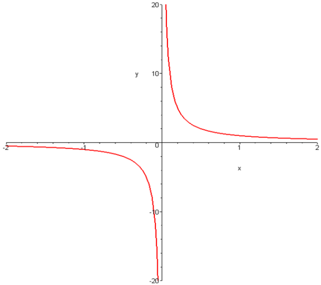
Primjer

Odredite neprave integrale

$$(a)\ \int_0^{\infty} e^{-x}dx, \qquad (b)\ \int_0^{\infty} \sin(x)dx, \qquad (c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Kažemo da funkcija $f(x)$ ima singularitet u točki $x = c$ ako je

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty.$$



Slika : Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ima singularitet u točki $x = 0$.

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima singularitet u točki $c \in [a, b]$.

- Ako je $c = a$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

- Ako je $c = b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

- Ako je $a < c < b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

gdje se integrali $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$ računaju kao u prethodnim slučajevima.

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima singularitet u točki $c \in [a, b]$.

- Ako je $c = a$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

- Ako je $c = b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

- Ako je $a < c < b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

gdje se integrali $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$ računaju kao u prethodnim slučajevima.

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima singularitet u točki $c \in [a, b]$.

- Ako je $c = a$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

- Ako je $c = b$, tada definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

- Ako je $a < c < b$, tada definiramo

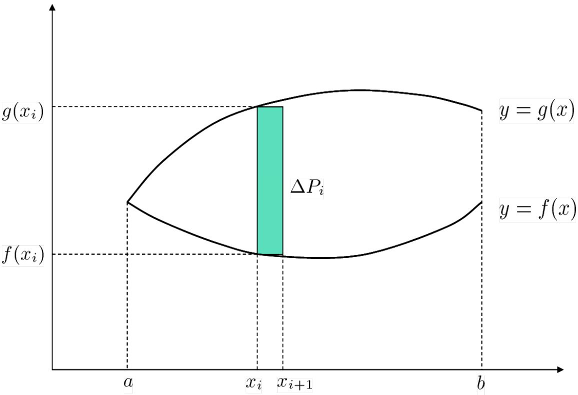
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

gdje se integrali $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$ računaju kao u prethodnim slučajevima.

Primjer

Odredite neprave integrale

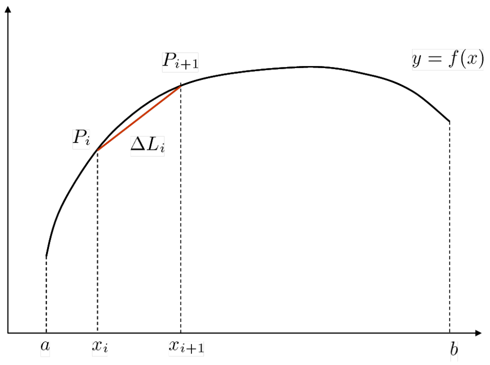
$$(a)\ \int_0^1 \ln(x)dx, \qquad (b)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}dx, \qquad (c)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$



Slika : Lik u ravnini omeđen dvjema krivuljama.

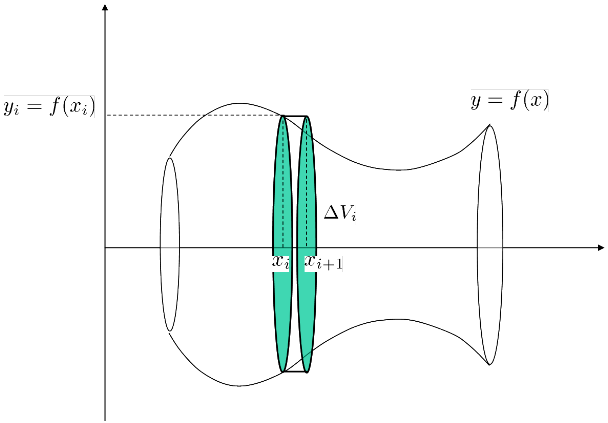
$$P = \int_a^b \left[g(x) - f(x) \right] dx$$

Duljina krivulje



Slika : Eksplicitno zadana krivulja $y = f(x)$.

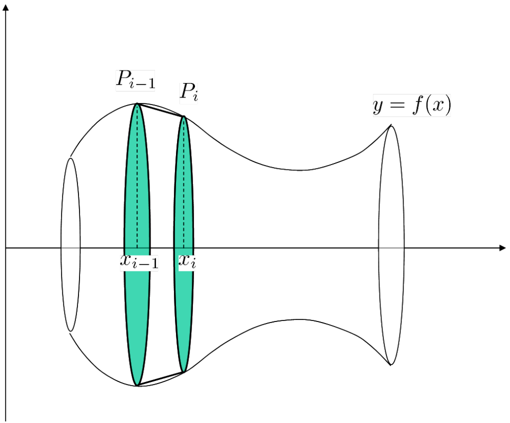
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$



Slika : Tijelo koje nastaje rotacijom krivulje oko osi simetrije.

$$P = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Oplošje rotacijskog tijela



Slika : Lik u ravnini omeđen dvjema krivuljama.

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$