

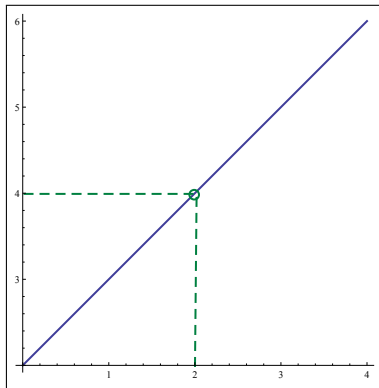
11. listopada 2016.

Limes funkcije

Promotrimo funkciju

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}. \quad (1)$$

Što možemo reći o ponašanju funkcije $f(x)$ u okolini točke $x_0 = 2$?



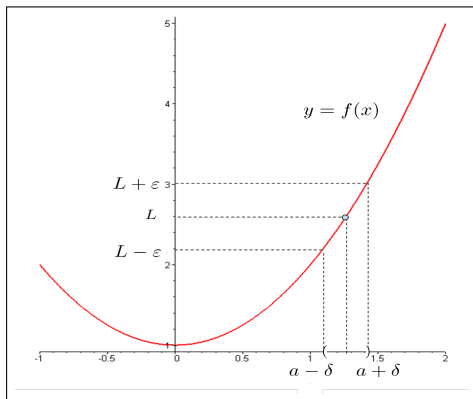
Definicija

Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $x = a$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (2)$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L. \quad (3)$$



Primjedba

- Limes ovisi samo o ponašanju funkcije u okolini točke x_0 , a ne o vrijednosti funkcije $f(x_0)$ ukoliko je definirano.
- Limes ne ovisi o načinu na koji $x \rightarrow x_0$.

Primjer

Dokažite primjenom definicije da je

1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4,$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$

Teorem o jedinstvenosti limesa*

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, tada je $L_1 = L_2$.

Primjedba

- Limes ovisi samo o ponašanju funkcije u okolini točke x_0 , a ne o vrijednosti funkcije $f(x_0)$ ukoliko je definirano.
- Limes ne ovisi o načinu na koji $x \rightarrow x_0$.

Primjer

Dokažite primjenom definicije da je

1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4,$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$

Teorem o jedinstvenosti limesa*

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, tada je $L_1 = L_2$.

Primjedba

- Limes ovisi samo o ponašanju funkcije u okolini točke x_0 , a ne o vrijednosti funkcije $f(x_0)$ ukoliko je definirano.
- Limes ne ovisi o načinu na koji $x \rightarrow x_0$.

Primjer

Dokažite primjenom definicije da je

1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4,$$

2

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$

Teorem o jedinstvenosti limesa*

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, tada je $L_1 = L_2$.

Fundamentalni teorem o limesima^{*a,b}

Pretpostavimo da je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = K. \quad (4)$$

Tada vrijedi

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + K,$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$ za svaki $c \in \mathbb{R},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LK,$
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = K/L$ ako je $L \neq 0.$

Pravilo supstitucije

- ❶ Ako je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom, tada je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0). \quad (5)$$

- ❷ Ako su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi, tada je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} \text{ uz uvjet } q(x_0) \neq 0. \quad (6)$$

- ❸ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ za svaki $x_0 > 0.$

Fundamentalni teorem o limesima^{*a,b}

Pretpostavimo da je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ i } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = K. \quad (4)$$

Tada vrijedi

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + K,$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$ za svaki $c \in \mathbb{R},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LK,$
- (d) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = K/L$ ako je $L \neq 0.$

Pravilo supstitucije

- ❶ Ako je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom, tada je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0). \quad (5)$$

- ❷ Ako su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi, tada je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} \quad \text{uz uvjet} \quad q(x_0) \neq 0. \quad (6)$$

- ❸ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ za svaki $x_0 > 0.$

Primjer

Odredite limese

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1},$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x},$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x+3} + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} \right),$$

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Propozicija*

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|.$$

Primjer

Odredite limese

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1},$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x},$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x+3} + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} \right),$$

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Propozicija*

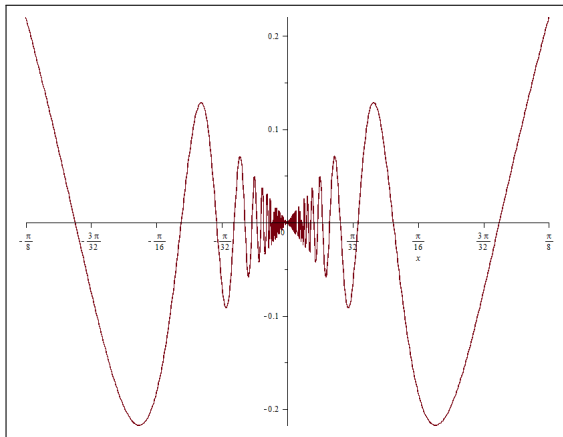
Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|.$$

Primjer

Pokažite da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \quad (7)$$



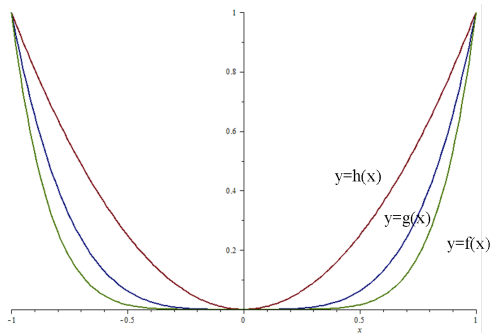
Teorem o ukliještenoj funkciji

Pretpostavimo da funkcije f , g i h zadovoljavaju nejednakost

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \quad (8)$$

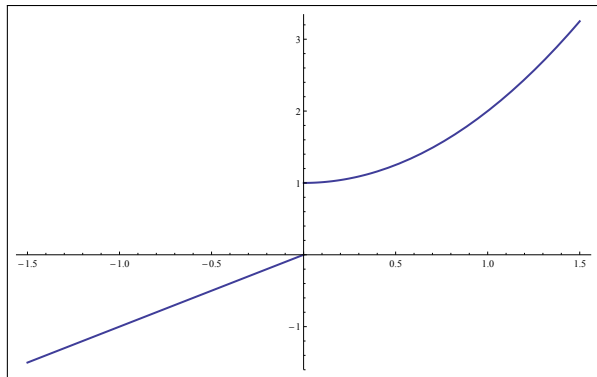
u okolini točke a za neki $\delta > 0$.

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, tada je $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.



Što možemo reći o limesu funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$



Definicija

Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes zdesna funkcije f u točki $x = a$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takav da

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (9)$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L. \quad (10)$$

Analogno definiramo limes slijeva.

Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes slijeva funkcije f u točki $x = a$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takav da

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (11)$$

Tada pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \quad (12)$$

Definicija

Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes zdesna funkcije f u točki $x = a$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takav da

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (9)$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L. \quad (10)$$

Analogno definiramo limes slijeva.

Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes slijeva funkcije f u točki $x = a$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takav da

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (11)$$

Tada pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \quad (12)$$

Primjer

Ispitajte jednostrane limese funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{x + |x|} \quad (13)$$

u točki $x = 0$.

Teorem*

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ako i samo ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \quad (14)$$

Ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, tada $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne postoji pa je ovaj teorem je koristan kada želimo pokazati da neki limes ne postoji.

Primjer

Ispitajte jednostrane limese funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{x + |x|} \quad (13)$$

u točki $x = 0$.

Teorem*

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ako i samo ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \quad (14)$$

Ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, tada $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne postoji pa je ovaj teorem je koristan kada želimo pokazati da neki limes ne postoji.

Primjer

Ispitajte jednostrane limese funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{x + |x|} \quad (13)$$

u točki $x = 0$.

Teorem*

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ako i samo ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \quad (14)$$

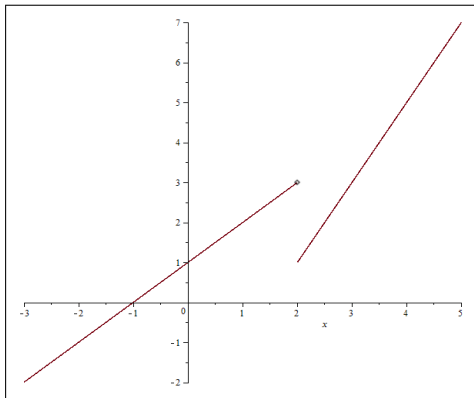
Ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, tada $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne postoji pa je ovaj teorem je koristan kada želimo pokazati da neki limes ne postoji.

Primjer

Odredite da li postoji limes funkcije

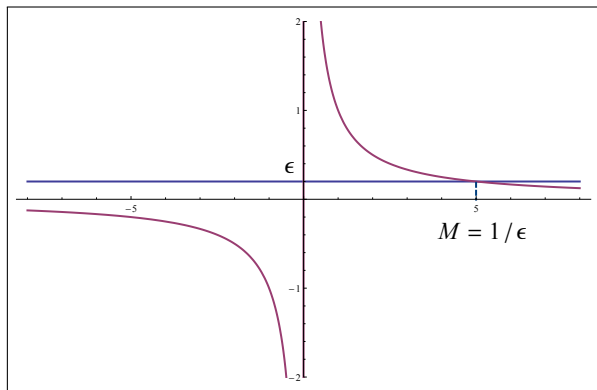
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

u točki $x = 2$.



Limes u beskonačnosti

Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ za velike vrijednosti varijable x .



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(16)

Definicija

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ takav da

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (17)$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ takav da

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (18)$$

Definicija

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ takav da

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (17)$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ako $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ takav da

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (18)$$

Ponašanje polinoma i racionalne funkcije u beskonačnosti

Ponašanje polinoma “u beskonačnosti” određeno je vodećom potencijom.

Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom. Tada je

$$p(x) \approx a_n x^n \quad \text{kada } x \rightarrow \pm\infty.$$

Ponašanje racionalne funkcije “u beskonačnosti” određeno je omjerom vodećih potencija brojnika i nazivnika.

Ako je $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, onda je

$$\frac{p(x)}{q(x)} \approx \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad \text{kada } x \rightarrow \pm\infty.$$

Ponašanje polinoma i racionalne funkcije u beskonačnosti

Ponašanje polinoma “u beskonačnosti” određeno je vodećom potencijom.

Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom. Tada je

$$p(x) \approx a_n x^n \quad \text{kada } x \rightarrow \pm\infty.$$

Ponašanje racionalne funkcije “u beskonačnosti” određeno je omjerom vodećih potencija brojnika i nazivnika.

Ako je $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$, onda je

$$\frac{p(x)}{q(x)} \approx \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \quad \text{kada } x \rightarrow \pm\infty.$$

Primjer

Odredite limese

1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + x}{2x^2 + 1},$$

2

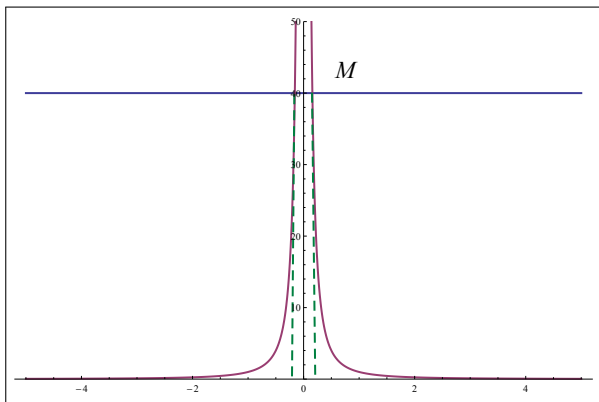
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x},$$

3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

Beskonačni limes

Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$ kada male vrednosti varijable x .



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(19)

Definicija

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M. \quad (20)$$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M. \quad (21)$$

Definicija

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

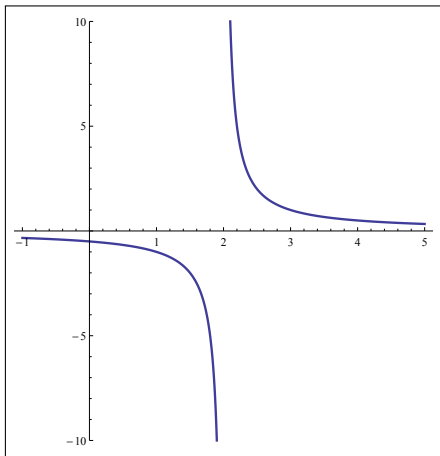
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M. \quad (20)$$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ako za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M. \quad (21)$$

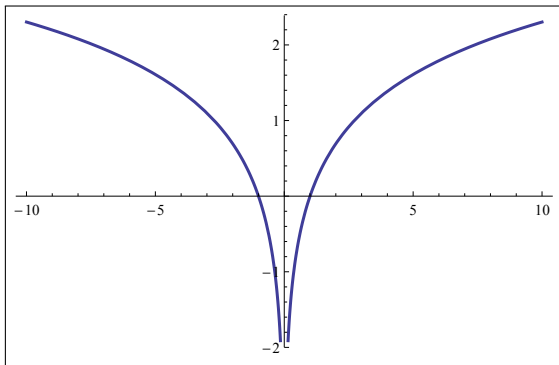
Primjer

Odredite jednostrane limese funkcije $f(x) = \frac{x}{x-2}$ u točki $x = 2$.



Primjer

Odredite jednostrane limese funkcije $f(x) = \ln(|x|)$ u točki $x = 0$.



Primjer

Objasnite zašto funkcija $f(x) = x \sin(x)$ nema limes kada $x \rightarrow \pm\infty$.

