

18. listopada 2016.

Neprekidne funkcije

Važnu klasu funkcija tvore neprekidne funkcije. To su funkcije f kod kojih mala promjena u nezavisnoj varijabli x uzrokuje malu promjenu u zavisnoj varijabli $y = f(x)$.

Definicija

Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija neprekidnosti podrazumijeva da je:

- 1 f definirana na nekoj okolini točke $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji,
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i $f(x_0)$ su jednaki.

Ako bilo koji od ova tri uvjeta nije ispunjen, kažemo da f ima **prekid** u točki x_0 .

Neprekidne funkcije

Važnu klasu funkcija tvore neprekidne funkcije. To su funkcije f kod kojih mala promjena u nezavisnoj varijabli x uzrokuje malu promjenu u zavisnoj varijabli $y = f(x)$.

Definicija

Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija neprekidnosti podrazumijeva da je:

- 1 f definirana na nekoj okolini točke $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji,
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i $f(x_0)$ su jednaki.

Ako bilo koji od ova tri uvjeta nije ispunjen, kažemo da f ima **prekid** u točki x_0 .

Neprekidne funkcije

Važnu klasu funkcija tvore neprekidne funkcije. To su funkcije f kod kojih mala promjena u nezavisnoj varijabli x uzrokuje malu promjenu u zavisnoj varijabli $y = f(x)$.

Definicija

Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija neprekidnosti podrazumijeva da je:

- 1 f definirana na nekoj okolini točke $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji,
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i $f(x_0)$ su jednaki.

Ako bilo koji od ova tri uvjeta nije ispunjen, kažemo da f ima **prekid** u točki x_0 .

Neprekidne funkcije

Važnu klasu funkcija tvore neprekidne funkcije. To su funkcije f kod kojih mala promjena u nezavisnoj varijabli x uzrokuje malu promjenu u zavisnoj varijabli $y = f(x)$.

Definicija

Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija neprekidnosti podrazumijeva da je:

- 1 f definirana na nekoj okolini točke $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji,
- 3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ i $f(x_0)$ su jednaki.

Ako bilo koji od ova tri uvjeta nije ispunjen, kažemo da f ima **prekid** u točki x_0 .

Definicija

Funkcija f je neprekidna intervalu (a, b) ako je f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$.

$$C(D) = \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je neprekidna na } D \right\}$$

Vrste prekida funkcije

Uklonjivi prekid

Kažemo da funkcija f ima prekid prve vrste u točki x_0 ako $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji, ali

- 1 f nije definirana u točki x_0 ili
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

U tom slučaju možemo definirati proširenje funkcije po neprekidnosti u točki x_0 sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ L, & x = x_0 \end{cases}$$

gdje je $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Definicija

Funkcija f je neprekidna intervalu (a, b) ako je f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$.

$$C(D) = \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je neprekidna na } D \right\}$$

Vrste prekida funkcije

Uklonjivi prekid

Kažemo da funkcija f ima prekid prve vrste u točki x_0 ako $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji, ali

- 1 f nije definirana u točki x_0 ili
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

U tom slučaju možemo definirati proširenje funkcije po neprekidnosti u točki x_0 sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ L, & x = x_0 \end{cases}$$

gdje je $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Definicija

Funkcija f je neprekidna intervalu (a, b) ako je f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$.

$$C(D) = \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je neprekidna na } D \right\}$$

Vrste prekida funkcije

Uklonjivi prekid

Kažemo da funkcija f ima prekid prve vrste u točki x_0 ako $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji, ali

- 1 f nije definirana u točki x_0 ili
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

U tom slučaju možemo definirati proširenje funkcije po neprekidnosti u točki x_0 sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ L, & x = x_0 \end{cases}$$

gdje je $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Definicija

Funkcija f je neprekidna intervalu (a, b) ako je f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in (a, b)$.

$$C(D) = \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je neprekidna na } D \right\}$$

Vrste prekida funkcije

Uklonjivi prekid

Kažemo da funkcija f ima prekid prve vrste u točki x_0 ako $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postoji, ali

- 1 f nije definirana u točki x_0 ili
- 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

U tom slučaju možemo definirati proširenje funkcije po neprekidnosti u točki x_0 sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ L, & x = x_0 \end{cases}$$

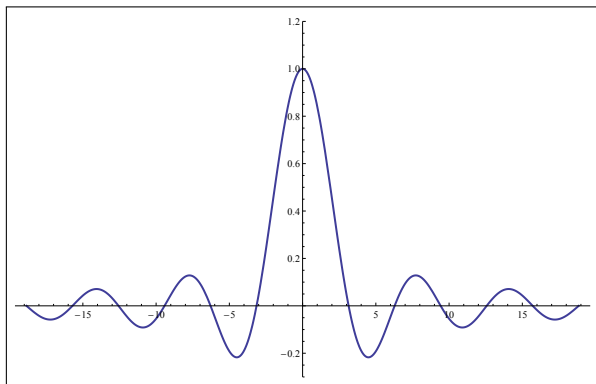
gdje je $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Primjer

Funkcija

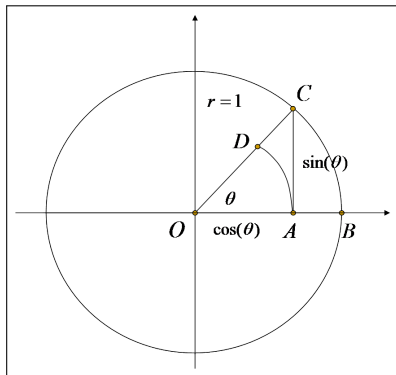
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

ima uklonjivi prekid u točki $x = 0$.



Pokažimo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



Prekid prve vrste

Kažemo da funkcija f ima prekid prve vrste u točki x_0 ako jednostrani limesi u x_0 postoje, ali

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

U tom slučaju promjena funkcije u točki x_0 je dana sa

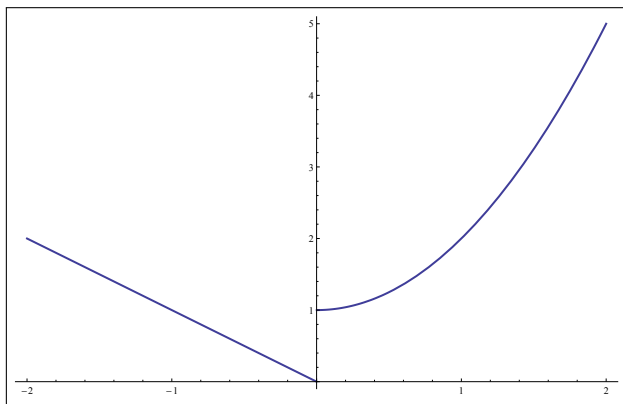
$$\Delta f = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Primjer

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x > 0, \end{cases}$$

ima prekid prve vrste u točki $x = 0$.



Prekid druge vrste

Kažemo da funkcija f ima prekid druge vrste u točki x_0 ako barem jedan od limesa

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

ne postoji.

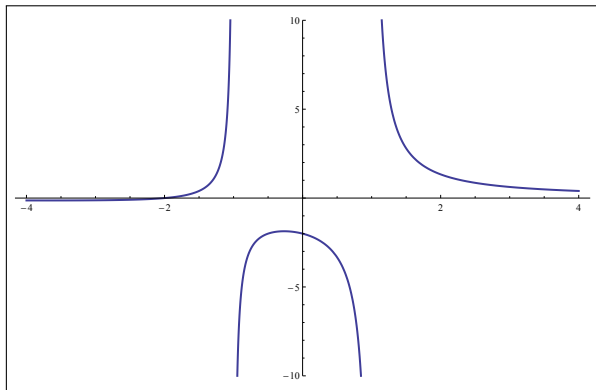
Racionalna funkcija $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ može imati prekid druge vrste u nultočkama polinoma $q(x)$.

Primjer

Funkcija

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

ima prekid druge vrste u točkama $x = -1$ i $x = 1$.



Naprekidnost funkcije je očuvana kod algebarskih operacija na funkcijama.

Teorem

Neka su funkcije f i g neprekidne u točki x_0 . Tada su funkcije

- 1 $f(x) + g(x)$,
- 2 $cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$,
- 3 $f(x)g(x)$,
- 4 $\frac{f(x)}{g(x)}$ gdje je $g(x_0) \neq 0$

neprekidne u x_0 .

Teorem (Neprekidnost kompozicije funkcija)

Neka je f neprekidna u točki x_0 , i neka je g neprekidna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ neprekidna u točki x_0 .

Ovaj teorem implicira da je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right),$$

ako je f neprekidna funkcija.

Naprekidnost funkcije je očuvana kod algebarskih operacija na funkcijama.

Teorem

Neka su funkcije f i g neprekidne u točki x_0 . Tada su funkcije

- 1 $f(x) + g(x)$,
- 2 $cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$,
- 3 $f(x)g(x)$,
- 4 $\frac{f(x)}{g(x)}$ gdje je $g(x_0) \neq 0$

neprekidne u x_0 .

Teorem (Neprekidnost kompozicije funkcija)

Neka je f neprekidna u točki x_0 , i neka je g neprekidna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ neprekidna u točki x_0 .

Ovaj teorem implicira da je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right),$$

ako je f neprekidna funkcija.

Naprekidnost funkcije je očuvana kod algebarskih operacija na funkcijama.

Teorem

Neka su funkcije f i g neprekidne u točki x_0 . Tada su funkcije

- 1 $f(x) + g(x)$,
- 2 $cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$,
- 3 $f(x)g(x)$,
- 4 $\frac{f(x)}{g(x)}$ gdje je $g(x_0) \neq 0$

neprekidne u x_0 .

Teorem (Neprekidnost kompozicije funkcija)

Neka je f neprekidna u točki x_0 , i neka je g neprekidna u točki $f(x_0)$. Tada je kompozicija funkcija $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ neprekidna u točki x_0 .

Ovaj teorem implicira da je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right),$$

ako je f neprekidna funkcija.

Koristeći prethodna dva teorema i neke elementarne nejednakosti može se pokazati da su **elementarne** funkcije **neprekidne** na svojim prirodnim domenama.

- 1 Svaki polinom je neprekidan na \mathbb{R} .
- 2 Svaka racionalna funkcija $\frac{p(x)}{q(x)}$ je neprekidna na \mathbb{R} osim u tačkama gdje je $q(x) = 0$.
- 3 Eksponencijalna funkcija e^x je neprekidna na \mathbb{R} .
- 4 Logaritamska funkcija $\ln(x)$ je neprekidna na $(0, \infty)$.
- 5 Funkcije $\sin(x)$ i $\cos(x)$ su neprekidne na \mathbb{R} .
- 6 Funkcija $\operatorname{tg}(x)$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 7 Funkcija $\operatorname{ctg}(x)$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \left\{ n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Koristeći prethodna dva teorema i neke elementarne nejednakosti može se pokazati da su **elementarne** funkcije **neprekidne** na svojim prirodnim domenama.

- 1 Svaki polinom je neprekidan na \mathbb{R} .
- 2 Svaka racionalna funkcija $\frac{p(x)}{q(x)}$ je neprekidna na \mathbb{R} osim u točkama gdje je $q(x) = 0$.
- 3 Eksponencijalna funkcija e^x je neprekidna na \mathbb{R} .
- 4 Logaritamska funkcija $\ln(x)$ je neprekidna na $(0, \infty)$.
- 5 Funkcije $\sin(x)$ i $\cos(x)$ su neprekidne na \mathbb{R} .
- 6 Funkcija $\operatorname{tg}(x)$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 7 Funkcija $\operatorname{ctg}(x)$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \left\{ n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Definicija

Funkcija $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je ograničena na intervalu I ako postoje $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ takva da je

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2 \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Promotrimo sljedeći problem:

Neka je funkcija f ograničena na intervalu I . Uz koje uvjete postoje f ima minimum ili maksimum na I ?

Teorem o ekstremnim vrijednostima

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{i} \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (2)$$

Definicija

Funkcija $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je ograničena na intervalu I ako postoje $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ takva da je

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2 \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Promotrimo sljedeći problem:

Neka je funkcija f ograničena na intervalu I . Uz koje uvjete postoje f ima minimum ili maksimum na I ?

Teorem o ekstremnim vrijednostima

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{i} \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (2)$$

Definicija

Funkcija $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je ograničena na intervalu I ako postoje $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ takva da je

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2 \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Promotrimo sljedeći problem:

Neka je funkcija f ograničena na intervalu I . Uz koje uvjete postoje f ima minimum ili maksimum na I ?

Teorem o ekstremnim vrijednostima

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada postoje $x_1, x_2 \in [a, b]$ takvi da je

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{i} \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x). \quad (2)$$

Korolar

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, onda je f ograničena na $[a, b]$.

Teorem o neprekidnosti inverzne funkcije

Ako je $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektivna i neprekidna funkcija, tada je inverzna funkcija $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ neprekidna.

Korolar

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, onda je f ograničena na $[a, b]$.

Teorem o neprekidnosti inverzne funkcije

Ako je $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ bijektivna i neprekidna funkcija, tada je inverzna funkcija $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ neprekidna.