Matematika 1

prof.dr.sc. Saša Krešić-Jurić

PMF–Split

Nizovi realnih brojeva

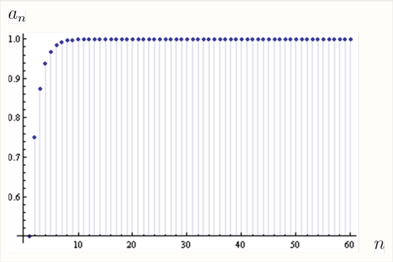
Definicija

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$f(n) = a_n \quad n\text{-ti član niza} \tag{1}$$

Primjer

$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$



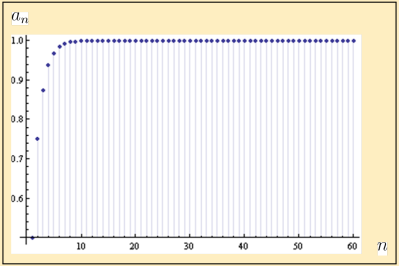
Definicija

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$f(n) = a_n \quad n\text{-ti član niza} \tag{1}$$

Primjer

$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$



Definicija

Kažemo da niz realnih brojeva $\{a_n\}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{3}$$

Napomena

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

U svakoj ε-okolini broja L nalazi se beskonačno mnogo članova niza a_n, $n > n_0$.
Izvan te okoline nalazi se konačno mnogo članova $a_1, a_2, \ldots a_{n_0}$.

Ako niz ima limes, tada kažemo da konvergira, u protivnom kažemo da divergira.

Ako je $a_k = a$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada kažemo da je niz $\{a\}$ stacionaran.

Definicija

Kažemo da niz realnih brojeva $\{a_n\}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L. \tag{3}$$

Napomena

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

U svakoj ε-okolini broja L nalazi se beskonačno mnogo članova niza a_n, $n > n_0$.
Izvan te okoline nalazi se konačno mnogo članova $a_1, a_2, \dots a_{n_0}$.

Ako niz ima limes, tada kažemo da konvergira, u protivnom kažemo da divergira.

Ako je $a_k = a$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada kažemo da je niz $\{a\}$ stacionaran.

Definicija

Kažemo da niz realnih brojeva $\{a_n\}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{3}$$

Napomena

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

U svakoj ε-okolini broja L nalazi se beskonačno mnogo članova niza a_n, $n > n_0$.
Izvan te okoline nalazi se konačno mnogo članova $a_1, a_2, \ldots a_{n_0}$.

Ako niz ima limes, tada kažemo da konvergira, u protivnom kažemo da divergira.

Ako je $a_k = a$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada kažemo da je niz $\{a\}$ stacionaran.

Definicija

Kažemo da niz realnih brojeva $\{a_n\}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{2}$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L. \tag{3}$$

Napomena

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

U svakoj ε-okolini broja L nalazi se beskonačno mnogo članova niza a_n, $n > n_0$.
Izvan te okoline nalazi se konačno mnogo članova $a_1, a_2, \ldots a_{n_0}$.

Ako niz ima limes, tada kažemo da konvergira, u protivnom kažemo da divergira.

Ako je $a_k = a$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tada kažemo da je niz $\{a\}$ stacionaran.

Definicija

Kažemo da niz $\{a_n\}$ divergira prema ∞, i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n > M \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{4}$$

Slično, kažemo da $\{a_n\}$ divergira prema $-\infty$, i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n < M \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{5}$$

Teorem (*)

Ako postoji, limes niza je jedinstven.

Definicija

Kažemo da niz $\{a_n\}$ divergira prema ∞, i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ako za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n > M \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{4}$$

Slično, kažemo da $\{a_n\}$ divergira prema $-\infty$, i pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n < M \quad \text{za svaki} \quad n > n_0. \tag{5}$$

Teorem $(*)$

Ako postoji, limes niza je jedinstven.

Teorem (∗)

Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni nizovi, i neka su $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Tada vrijedi

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kA$ za svaki $k \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}(1/b_n) = 1/B$ ako je $b_n \neq 0$ i $B \neq 0$,

(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$ ako je $b_n \neq 0$ i $B \neq 0$.

Definicija

Kažemo da je niz $\{a_n\}$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je

$$|a_n| \leq M \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Lema (∗)

Ako $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ postoji, tada je niz $\{a_n\}$ ograničen.

Teorem (*)

Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni nizovi, i neka su $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Tada vrijedi

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kA$ za svaki $k \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}(1/b_n) = 1/B$ ako je $b_n \neq 0$ i $B \neq 0$,

(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$ ako je $b_n \neq 0$ i $B \neq 0$.

Definicija

Kažemo da je niz $\{a_n\}$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je

$$|a_n| \leq M \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Lema (*)

Ako $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ postoji, tada je niz $\{a_n\}$ ograničen.

Teorem (∗)

Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni nizovi, i neka su $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Tada vrijedi

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} ka_n = kA$ za svaki $k \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

(iv) $\lim_{n\to\infty}(1/b_n) = 1/B$ ako je $b_n \neq 0$ i $B \neq 0$,

(v) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$ ako je $b_n \neq 0$ i $B \neq 0$.

Definicija

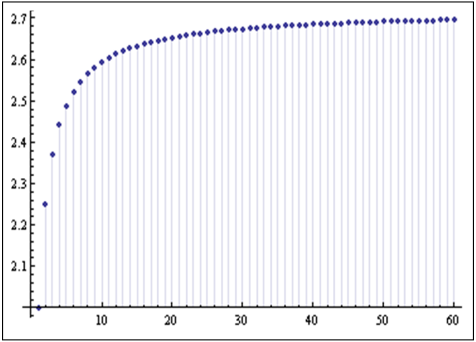
Kažemo da je niz $\{a_n\}$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da je

$$|a_n| \leq M \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Lema (∗)

Ako $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ postoji, tada je niz $\{a_n\}$ ograničen.

Eulerov broj kao limes niza



Niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergira prema Euleorovom broju $e \approx 2.718$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Podnizovi

Definicija

Niz $\{b_n\}$ naziva se podniz niza $\{a_n\}$ ako postoje prirodni brojevi $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ takvi da je

$$b_k = a_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Primijetimo da je $k \leq n_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Na primjer, $b_k = a_{2k}$ je podniz

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots \tag{8}$$

Definicija

Niz $\{b_n\}$ naziva se podniz niza $\{a_n\}$ ako postoje prirodni brojevi $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ takvi da je

$$b_k = a_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Primijetimo da je $k \leq n_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Na primjer, $b_k = a_{2k}$ je podniz

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots \tag{8}$$

Definicija

Niz $\{b_n\}$ naziva se podniz niza $\{a_n\}$ ako postoje prirodni brojevi $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ takvi da je

$$b_k = a_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Primijetimo da je $k \leq n_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Na primjer, $b_k = a_{2k}$ je podniz

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots \tag{8}$$

Podnizovi

Definicija

Niz $\{b_n\}$ naziva se podniz niza $\{a_n\}$ ako postoje prirodni brojevi $n_1 < n_2 < n_3 \dots$ takvi da je

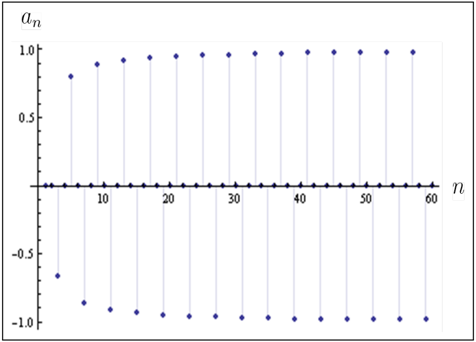
$$b_k = a_{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{7}$$

Primijetimo da je $k \leq n_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Na primjer, $b_k = a_{2k}$ je podniz

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \dots \tag{8}$$

Primjer



Niz $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ima tri konvergentna podniza $\{a_{2n}\}$, $\{a_{4n-1}\}$ i $\{a_{4n+1}\}$.

Gomilište niza

Definicija

Realni broj x_0 nazivamo se gomilište niza $\{a_n\}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ koji konvergira prema x_0.

Neka je C skup svih gomilišta niza $\{a_n\}$. Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, tada definiramo

$$\limsup a_n = \sup C \quad \text{i} \quad \liminf a_n = \inf C. \tag{9}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo, tada je

$$\limsup a_n = +\infty. \tag{10}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozdo, tada je

$$\liminf a_n = -\infty. \tag{11}$$

Teorem

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ako i samo ako je $L = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Gomilište niza

Definicija

Realni broj x_0 nazivamo se gomilište niza $\{a_n\}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ koji konvergira prema x_0.

Neka je C skup svih gomilišta niza $\{a_n\}$. Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, tada definiramo

$$\limsup a_n = \sup C \quad \text{i} \quad \liminf a_n = \inf C. \tag{9}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo, tada je

$$\limsup a_n = +\infty. \tag{10}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozdo, tada je

$$\liminf a_n = -\infty. \tag{11}$$

Teorem

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ako i samo ako je $L = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Gomilište niza

Definicija

Realni broj x_0 nazivamo se gomilište niza $\{a_n\}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ koji konvergira prema x_0.

Neka je C skup svih gomilišta niza $\{a_n\}$. Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, tada definiramo

$$\limsup a_n = \sup C \quad \text{i} \quad \liminf a_n = \inf C. \tag{9}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo, tada je

$$\limsup a_n = +\infty. \tag{10}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozdo, tada je

$$\liminf a_n = -\infty. \tag{11}$$

Teorem

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ako i samo ako je $L = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Gomilište niza

Definicija

Realni broj x_0 nazivamo se gomilište niza $\{a_n\}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}$ koji konvergira prema x_0.

Neka je C skup svih gomilišta niza $\{a_n\}$. Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, tada definiramo

$$\limsup a_n = \sup C \quad \text{i} \quad \liminf a_n = \inf C. \tag{9}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo, tada je

$$\limsup a_n = +\infty. \tag{10}$$

Ako $\{a_n\}$ nije ograničen odozdo, tada je

$$\liminf a_n = -\infty. \tag{11}$$

Teorem

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ako i samo ako je $L = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Cauchyev niz

Definicija

Niz $\{a_n\}$ naziva se Cauchyev niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{12}$$

Propozicija (∗)

Svaki konvergentni niz je Cauchyev niz.

Vrijedi i obrat ove tvrdnje.

Teorem (Potpunost skupa realnih brojeva)

Svaki Cauchyev niz realnih brojeva je konvergentan.

Cauchyev niz

Definicija

Niz $\{a_n\}$ naziva se Cauchyev niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{12}$$

Propozicija (∗)

Svaki konvergentni niz je Cauchyev niz.

Vrijedi i obrat ove tvrdnje.

Teorem (Potpunost skupa realnih brojeva)

Svaki Cauchyev niz realnih brojeva je konvergentan.

Cauchyev niz

Definicija

Niz $\{a_n\}$ naziva se Cauchyev niz ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n, m > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{12}$$

Propozicija (∗)

Svaki konvergentni niz je Cauchyev niz.

Vrijedi i obrat ove tvrdnje.

Teorem (Potpunost skupa realnih brojeva)

Svaki Cauchyev niz realnih brojeva je konvergentan.

Cauchyev niz u skupu $\mathbb{Q}$ ne mora biti konvergentan $\Rightarrow$ skup $\mathbb{Q}$ nije potpun.

Moguće je konstruirati niz racionalnih brojeva koji konvergira ka $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.