

Primjene diferencijalnog računa

17. studenog 2015.

L'Hospitalovo pravilo

Teorem (Neodredjeni oblik $\frac{0}{0}$)

Neka su f i g diferencijabilne funkcije na skupu $I = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$. Neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$ i neka je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad (1)$$

Ako $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2)$$

Teorem (Neodredjeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$)

Neka su f i g diferencijabilne funkcije na skupu $I = (M, \infty)$, gdje je $M > 0$, i neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Pretpostavimo da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty. \quad (3)$$

Ako $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji, onda je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4)$$

Slična tvrdnja vrijedi kada $x \rightarrow -\infty$.

Limesi neodredjenih oblika

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \quad (5)$$

takodjer se mogu odrediti L'Hospitalovim pravilom svodjenjem na jedan od osnovnih oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorem (Neodredjeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$)

Neka su f i g diferencijabilne funkcije na skupu $I = (M, \infty)$, gdje je $M > 0$, i neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Pretpostavimo da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty. \quad (3)$$

Ako $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji, onda je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (4)$$

Slična tvrdnja vrijedi kada $x \rightarrow -\infty$.

Limesi neodredjenih oblika

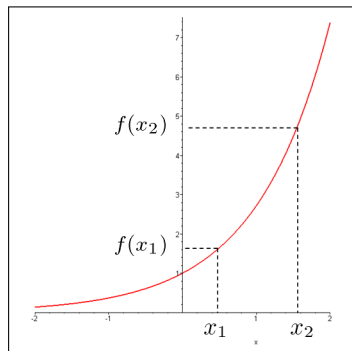
$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \quad (5)$$

takodjer se mogu odrediti L'Hospitalovim pravilom svodjenjem na jedan od osnovnih oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Ispitivanje toka funkcije

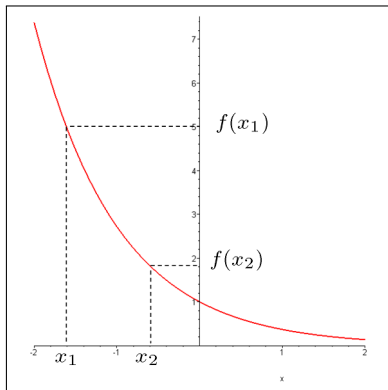
Definicija (Rastuća funkcija)

Kažemo da je funkcija f strogo rastuća na intervalu I ako za svaki par točaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$.



Definicija (Padajuća funkcija)

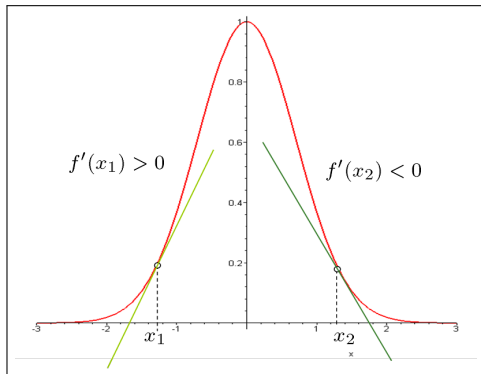
Kažemo da je f strogo padajuća na intervalu I ako za svaki par točaka $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$.



Teorem o monotonosti (*)

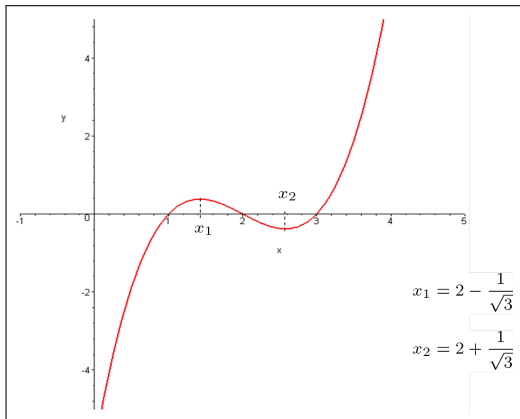
Neka je f diferencijabilna funkcija na intervalu (a, b) .

- (i) Ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je f strogo rastuća na (a, b) .
- (ii) Ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je f strogo padajuća na (a, b) .



Primjer

Odredite intervale monotonosti funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.



Teorem (Dovoljan uvjet za postojanje ekstrema) (*)

Neka je f neprekidna na intervalu (a, b) i diferencijabilna na (a, b) osim eventualno u točki $c \in (a, b)$. Ako f' mijenja predznak u točki c

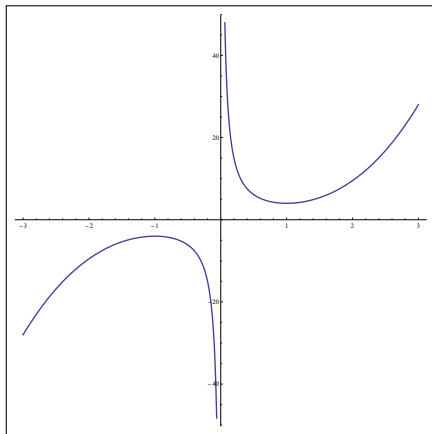
- (i) s pozitivnog u negativni, tada je $f(c)$ lokalni maksimum,
- (ii) s negativnog u pozitivni, tada je $f(c)$ lokalni minimum.

	predznak	ekstrem
$f'(x)$	$- \mapsto +$	lokalni minimum
$f'(x)$	$+ \mapsto -$	lokalni maksimum

Primjer

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}. \quad (6)$$



Teorem (*)

Neka je funkcija f dva puta derivabilna u točki $x = c$ i neka je $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Ako je

- (i) $f''(c) > 0$, tada je $f(c)$ lokalni minimum,
- (ii) $f''(c) < 0$, tada je $f(c)$ lokalni maksimum.

Napomena

Ako $f'(c)$ ili $f''(c)$ ne postoji, tada lokalni ekstrem određujemo ispitivanjem predznaka prve derivacije u okolini točke $x = c$.

Teorem (*)

Neka je funkcija f dva puta derivabilna u točki $x = c$ i neka je $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Ako je

- (i) $f''(c) > 0$, tada je $f(c)$ lokalni minimum,
- (ii) $f''(c) < 0$, tada je $f(c)$ lokalni maksimum.

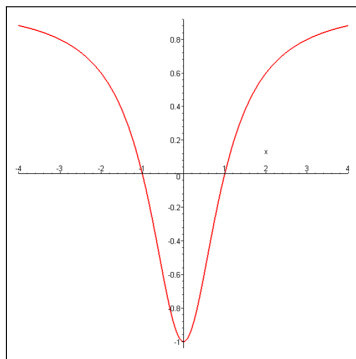
Napomena

Ako $f'(c)$ ili $f''(c)$ ne postoji, tada lokalni ekstrem određujemo ispitivanjem predznaka prve derivacije u okolini točke $x = c$.

Primjer

Koristeći drugu derivaciju odredite lokalne ekstreme funkcije

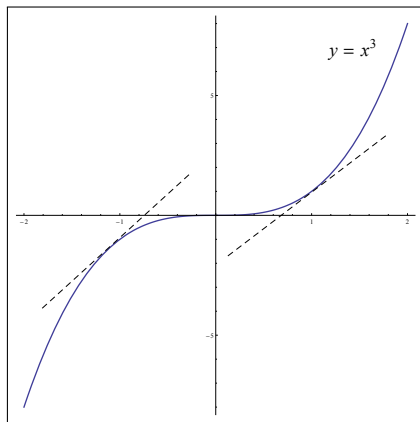
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \quad (7)$$



Konveksne i konkavne funkcije

Funkcija $y = x^3$ je rastuća na intervalu $(-\infty, \infty)$. Graf funkcije leži

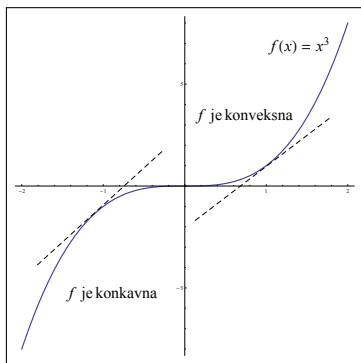
- ispod tangente na $(-\infty, 0)$,
- iznad tangente na $(0, \infty)$.



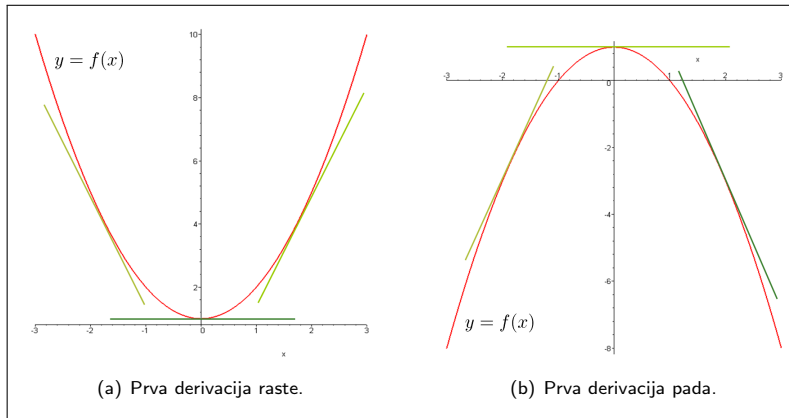
Definicija

Kažemo da je graf funkcije f

- **konveksan** na intervalu (a, b) ako za svaki $x \in (a, b)$ graf funkcije leži **iznad** tangente u točki $(x, f(x))$,
- **konkavan** na intervalu (a, b) ako za svaki $x \in (a, b)$ graf funkcije leži **ispod** tangente u točki $(x, f(x))$.



Predznak druge derivacije određuje je li funkcija konveksna ili konkavna na zadanom intervalu.



Teorem (*)

Neka je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu (a, b) .

- (i) Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konveksan na (a, b) .
- (ii) Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konkavan na (a, b) .

Definicija

Kažemo da je c točka infleksije funkcije f ako je f neprekidna u c i ako postoji $\delta > 0$ takav da je f konveksna na $(c - \delta, c)$ i konkavna na $(c, c + \delta)$, ili obratno.

Teorem (*)

Neka je f dva puta derivabilna na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Ako f'' mijenja predznak u točki c , tada f ima infleksiju u c i $f''(c) = 0$.

Teorem (*)

Neka je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu (a, b) .

- (i) Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konveksan na (a, b) .
- (ii) Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konkavan na (a, b) .

Definicija

Kažemo da je c točka infleksije funkcije f ako je f neprekidna u c i ako postoji $\delta > 0$ takav da je f konveksna na $(c - \delta, c)$ i konkavna na $(c, c + \delta)$, ili obratno.

Teorem (*)

Neka je f dva puta derivabilna na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Ako f'' mijenja predznak u točki c , tada f ima infleksiju u c i $f''(c) = 0$.

Teorem (*)

Neka je funkcija f dva puta derivabilna na intervalu (a, b) .

- (i) Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konveksan na (a, b) .
- (ii) Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in (a, b)$, tada je graf funkcije f konkavan na (a, b) .

Definicija

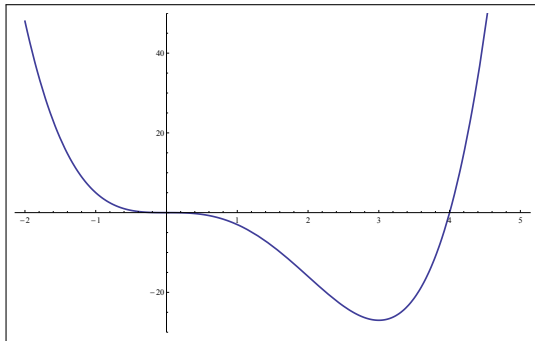
Kažemo da je c točka infleksije funkcije f ako je f neprekidna u c i ako postoji $\delta > 0$ takav da je f konveksna na $(c - \delta, c)$ i konkavna na $(c, c + \delta)$, ili obratno.

Teorem (*)

Neka je f dva puta derivabilna na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Ako f'' mijenja predznak u točki c , tada f ima infleksiju u c i $f''(c) = 0$.

Primjer

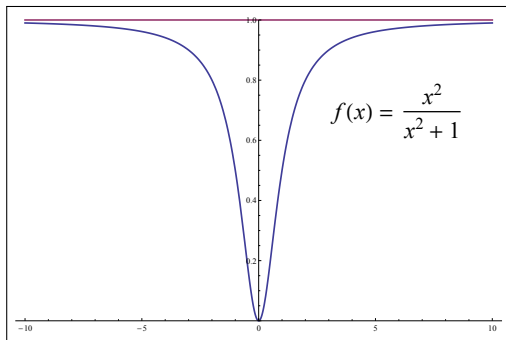
Odredite intervale zakrivljenosti i točke infleksije funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3$.



Definicija

Pravac $y = c$ je horizontalna asimptota funkcije f

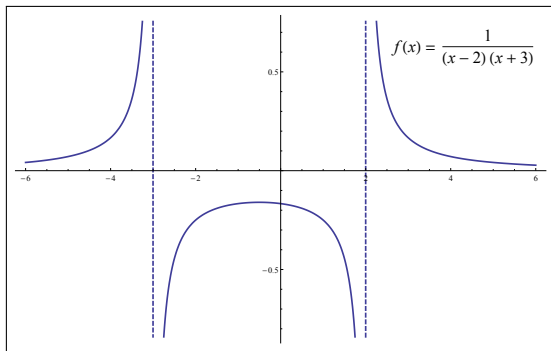
- u lijevoj strani ako je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$,
- u desnoj strani ako je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$.



Definicija

Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota funkcije f

- u lijevoj strani ako je $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$,
- u desnoj strani ako je $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$.



Skiciranje grafa funkcije

- 1 domena funkcije
- 2 sjecišta s x i y osima
- 3 parnost funkcije: $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$
- 4 intervali monotonosti
- 5 lokalni ekstremi
- 6 konveksnost, konkavnost
- 7 točke infleksije
- 8 asimptote