9. prosinca 2014.

Redovi realnih brojeva

Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva. Kako možemo definirati beskonačnu sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

Da li je suma reda realni broj i kako ju izračunati?

$$\begin{aligned} a_k &= && k\text{-ti član reda} \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n && n\text{-ta parcijalna suma reda} \end{aligned}$$

Definicija

Neka je $\{a_k\}$ niz realnih brojeva. Red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je niz pacijalnih suma $\{S_n\}$.

Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva. Kako možemo definirati beskonačnu sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

Da li je suma reda realni broj i kako ju izračunati?

$a_k =$ k-ti član reda

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ n-ta parcijalna suma reda

Definicija

Neka je $\{a_k\}$ niz realnih brojeva. Red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je niz pacijalnih suma $\{S_n\}$.

Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva. Kako možemo definirati beskonačnu sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

Da li je suma reda realni broj i kako ju izračunati?

$$\begin{aligned} a_k &= \quad k\text{-ti član reda} \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad n\text{-ta parcijalna suma reda} \end{aligned}$$

Definicija

Neka je $\{a_k\}$ niz realnih brojeva. Red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je niz pacijalnih suma $\{S_n\}$.

Redovi realnih brojeva

Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva. Kako možemo definirati beskonačnu sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

Da li je suma reda realni broj i kako ju izračunati?

$$\begin{aligned} a_k &= \quad k\text{-ti član reda} \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad n\text{-ta parcijalna suma reda} \end{aligned}$$

Definicija

Neka je $\{a_k\}$ niz realnih brojeva. Red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je niz pacijalnih suma $\{S_n\}$.

Konvergencija reda

Definicija

Kažemo da red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira prema S ako niz parcijalnih suma $\{S_n\}$ konvergira prema S. Ako niz $\{S_n\}$ divergira , tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Ako red konvergira, tada S nazivamo suma reda i pišemo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Primjer

Geometrijski red definiramo sa

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots .$$

Red konvergira za $|q| < 1$ i vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Definicija

Kažemo da red realnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira prema S ako niz parcijalnih suma $\{S_n\}$ konvergira prema S. Ako niz $\{S_n\}$ divergira , tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Ako red konvergira, tada S nazivamo suma reda i pišemo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Primjer

Geometrijski red definiramo sa

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots .$$

Red konvergira za $|q| < 1$ i vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Teorem (Nužni uvjet za konvergenciju reda) (∗)

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, tada je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Obrat teorema ne vrijedi. Harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ispunjava nužni uvjet konvergencije, ali nije konvergentan.

Teorem

(∗) Neka su $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni redovi, i neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Teorem (Nužni uvjet za konvergenciju reda) (*)

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, tada je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Obrat teorema ne vrijedi. Harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ispunjava nužni uvjet konvergencije, ali nije konvergentan.

Teorem

(*) Neka su $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni redovi, i neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Teorem (Nužni uvjet za konvergenciju reda) (*)

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira, tada je $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Obrat teorema ne vrijedi. Harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ispunjava nužni uvjet konvergencije, ali nije konvergentan.

Teorem

(*) Neka su $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentni redovi, i neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

D'Alabertov kriterij (∗)

Neka je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i neka je

$$R = \lim \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

(i) Ako je $R < 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira,

(ii) Ako je $R > 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Cauchyev kriterij

Neka je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i neka je

$$R = \lim \sqrt[k]{a_k}.$$

(i) Ako je $R < 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

(ii) Ako je $R > 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

D'Alabertov kriterij ($*$)

Neka je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i neka je

$$R = \lim \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

(i) Ako je $R < 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira,

(ii) Ako je $R > 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Cauchyev kriterij

Neka je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i neka je

$$R = \lim \sqrt[k]{a_k}.$$

(i) Ako je $R < 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

(ii) Ako je $R > 1$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Alternirajući redovi

Alternirajući red je red oblika

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots, \quad a_k \geq 0 \quad \text{za svaki} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Konvergenciju takvih redova isputujemo pomoću Leibnizovog kriterija.

Leibnizov kriterij

Neka je $\{a_k\}$ monotono padajući niz takav da je $a_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Tada alternirajući red

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \tag{2}$$

konvergira i $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k < a_1$.

Apsolutna konvergencija

Definicija

- Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira.
- Ako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ali $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uvjetno konvergira.

Primjer

- Red
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \cdots \tag{3}$$
je apsolutno konvergentan jer je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$.
- Red
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{4}$$
je uvjetno konvergentan jer harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ne konvergira.

Definicija

- Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira.
- Ako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ali $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uvjetno konvergira.

Primjer

- Red
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \cdots \tag{3}$$
je apsolutno konvergentan jer je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$.
- Red
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{4}$$
je uvjetno konvergentan jer harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ne konvergira.

Definicija

- Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergira.
- Ako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira ali $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergira, tada kažemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uvjetno konvergira.

Primjer

- Red
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \cdots \tag{3}$$
je apsolutno konvergentan jer je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$.
- Red
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \tag{4}$$
je uvjetno konvergentan jer harmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ne konvergira.

Teorem

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

Napomena: Obrat tvrdnje ne vrijedi.

Primjer

$$\text{alternirajući red} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{konvergira,}$$

$$\text{harmonijski red} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ne kovnergira}$$

- Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergentan red, tada se permutiranjem njegovih članova njegova suma na mijenja.
- Ako je red uvjetno konvergentan, tada permutiranjem članova možemo promijeniti njegovu sumu.

Teorem

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

Napomena: Obrat tvrdnje ne vrijedi.

Primjer

alternirajući red $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergira,

harmonijski red $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ne kovnergira

- Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergentan red, tada se permutiranjem njegovih članova njegova suma na mijenja.
- Ako je red uvjetno konvergentan, tada permutiranjem članova možemo promijeniti njegovu sumu.

Teorem

Ako red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergira, tada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

Napomena: Obrat tvrdnje ne vrijedi.

Primjer

$$\text{alternirajući red} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{konvergira,}$$

$$\text{harmonijski red} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ne kovnergira}$$

- Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergentan red, tada se permutiranjem njegovih članova njegova suma na mijenja.
- Ako je red uvjetno konvergentan, tada permutiranjem članova možemo promijeniti njegovu sumu.