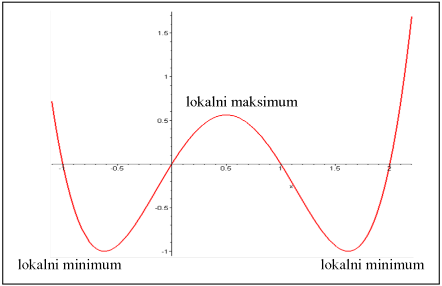
Teoremi diferencijalnog računa

18. studenog 2014.

Kako možemo definirati lokalne ekstreme funkcije?



Definicija

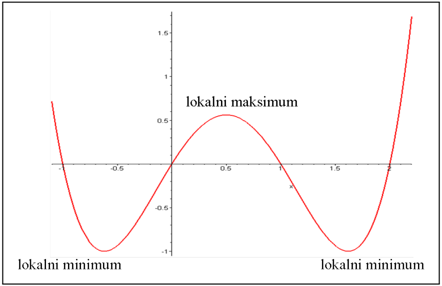
Kažemo da je $f(x_0)$ lokalni minimum funkcije f ako postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{1}$$

Slično, $f(x_0)$ je lokalni maksimum ako postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{2}$$

Kako možemo definirati lokalne ekstreme funkcije?



Definicija

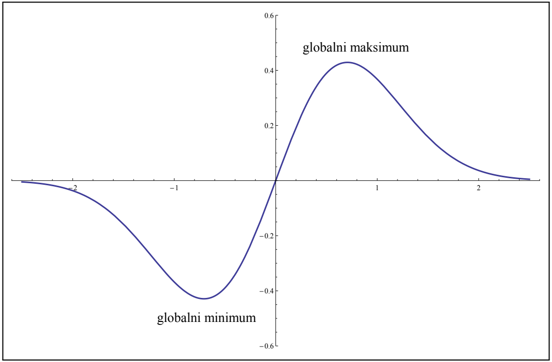
Kažemo da je $f(x_0)$ lokalni minimum funkcije f ako postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{1}$$

Slično, $f(x_0)$ je lokalni maksimum ako postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{za svaki} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{2}$$

Osim lokalnih, funkcija može imati globalne ekstreme.



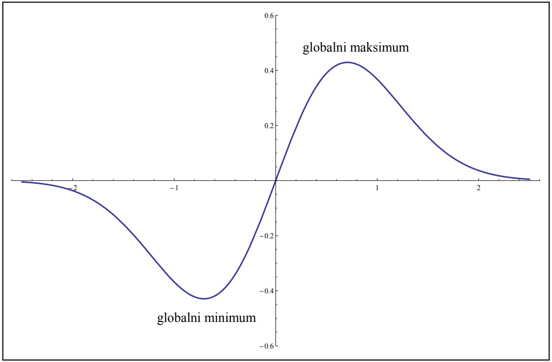
Definicija

Kažemo da je $f(x_0)$ globalni minimum funkcije f na invervalu I u točki $x_0 \in I$, ako je

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{za svaki} \quad x \in I.$$

Slično se definira globalni maksimum funkcije f na intervalu I.

Osim lokalnih, funkcija može imati globalne ekstreme.



Definicija

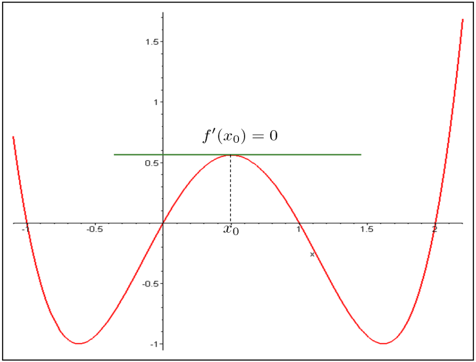
Kažemo da je $f(x_0)$ globalni minimum funkcije f na invervalu I u točki $x_0 \in I$, ako je

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{za svaki} \quad x \in I.$$

Slično se definira globalni maksimum funkcije f na intervalu I.

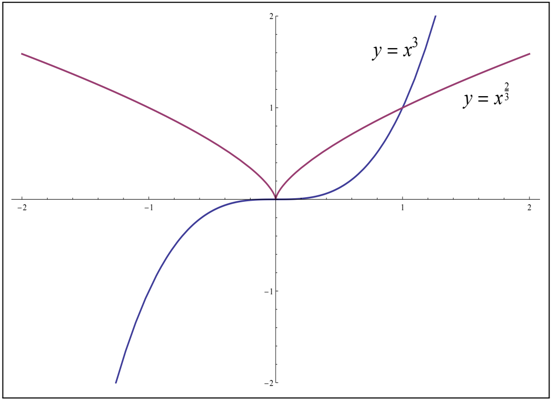
Fermatov teorem (∗)

Ako je $f(x_0)$ lokalni ekstrem funkcije f, tada je $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji.



Napomene

- Obrat Fermatovog teorema na vrijedi: ako je $f'(x_0) = 0$, tada $f(x_0)$ ne mora biti ekstrem.
- Funkcija može imati ekstrem $f(x_0)$ i u slučaju kada $f'(x_0)$ ne postoji.

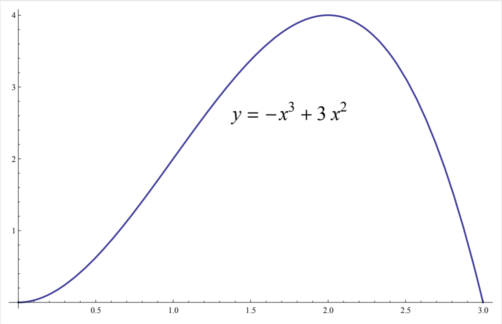


Definicija

Ako je f neprekidna u točki x_0 i $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji, tada kažemo da je x_0 kritična točka funkcije f.

Rolleov teorem (*)

Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijalbilna na otvorenom intervalu (a, b). Ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je $f'(x_0) = 0$.

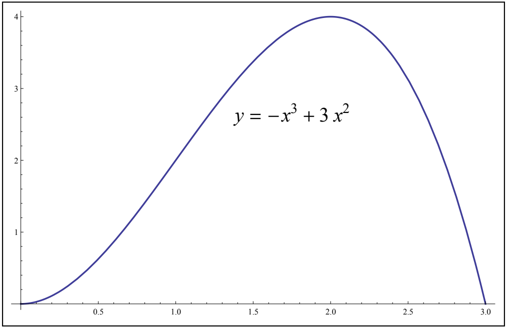


Definicija

Ako je f neprekidna u točki x_0 i $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji, tada kažemo da je x_0 kritična točka funkcije f.

Rolleov teorem (*)

Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijalbilna na otvorenom intervalu (a, b). Ako je $f(a) = f(b)$, tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je $f'(x_0) = 0$.



Cauchyev teorem srednje vrijednosti ($*$)

Ako su funkcije f i g neprekidne na $[a, b]$ i diferencijabilne na (a, b), tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je

$$f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) = g'(x_0)\,(f(b) - f(a))\,. \tag{3}$$

Posebni slučaj Cauchyevog teorema je

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti ($*$)

Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b), tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \tag{4}$$

Cauchyev teorem srednje vrijednosti ($*$)

Ako su funkcije f i g neprekidne na $[a, b]$ i diferencijabilne na (a, b), tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je

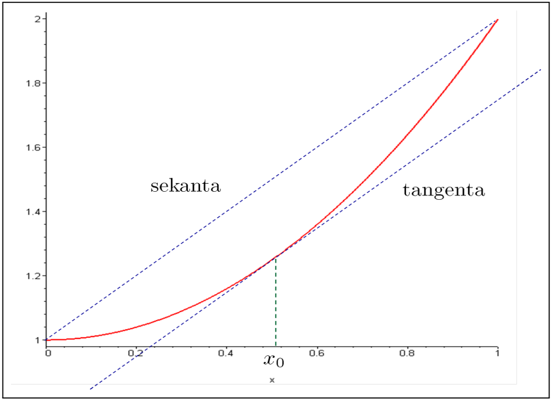
$$f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) = g'(x_0)\,(f(b) - f(a)) \,. \tag{3}$$

Posebni slučaj Cauchyevog teorema je

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti ($*$)

Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b), tada postoji $x_0 \in (a, b)$ takav da je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4}$$



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \text{nagib sekante kroz točke } (a, f(a)) \text{ i } (b, f(b)) \tag{5}$$

$$f'(x_0) = \text{nagib tangente kroz točku } (x_0, f(x_0)) \tag{6}$$