Matematika 1

prof.dr.sc. Saša Krešić-Jurić
PMF–Split

Sadržaj kolegija

1. Skupovi i funkcije
2. Limes funkcije i neprekidnost
3. Derivacija funkcije
4. Teoremi diferencijalnog računa i primjene
5. Nizovi i redovi realnih brojeva
6. Nizovi i redovi funkcija
7. Neodređeni integral
8. Određeni integral i primjene

Skup je dobro definirana kolekcija objekata koje nazivamo elementi skupa. Skup možemo zadati tako da izlistamo njegove elemente, na primjer

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \tag{1}$$

ili opisujući svojstva elemenata skupa,

$$A = \Big\{ n \mid n \text{ je jedan od prva četiri prirodna broja} \Big\}. \tag{2}$$

Ako je x element skupa A, tada pišemo

$$x \in A. \tag{3}$$

Kažemo da je A podskup od B, $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A sadržan u B:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B. \tag{4}$$

Skup je dobro definirana kolekcija objekata koje nazivamo elementi skupa. Skup možemo zadati tako da izlistamo njegove elemente, na primjer

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \tag{1}$$

ili opisujući svojstva elemenata skupa,

$$A = \Big\{ n \mid n \text{ je jedan od prva četiri prirodna broja} \Big\}. \tag{2}$$

Ako je x element skupa A, tada pišemo

$$x \in A. \tag{3}$$

Kažemo da je A podskup od B, $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A sadržan u B:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B. \tag{4}$$

Skup je dobro definirana kolekcija objekata koje nazivamo elementi skupa. Skup možemo zadati tako da izlistamo njegove elemente, na primjer

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \tag{1}$$

ili opisujući svojstva elemenata skupa,

$$A = \Big\{ n \mid n \text{ je jedan od prva četiri prirodna broja} \Big\}. \tag{2}$$

Ako je x element skupa A, tada pišemo

$$x \in A. \tag{3}$$

Kažemo da je A podskup od B, $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A sadržan u B:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B. \tag{4}$$

Prazan skup je skup koji ne sadrži ni jedan element, i označavamo ga sa $\emptyset$.

Na skupovima definiramo sljedeće operacije:

1. Unija skupova A i B
$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ ili } x \in B \right\} \tag{5}$$

2. Presjek skupova A i B
$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ i } x \in B \right\} \tag{6}$$

3. Razliku skupova A i B
$$A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \text{ i } x \notin B \right\} \tag{7}$$

4. Kartezijev umnožak skupova
$$A \times B = \left\{ (x, y) \mid x \in A,\ y \in B \right\} \tag{8}$$

Prazan skup je skup koji ne sadrži ni jedan element, i označavamo ga sa $\emptyset$.

Na skupovima definiramo sljedeće operacije:

1. Unija skupova A i B
$$A \cup B = \Big\{ x \mid x \in A \text{ ili } x \in B \Big\} \tag{5}$$

2. Presjek skupova A i B
$$A \cap B = \Big\{ x \mid x \in A \text{ i } x \in B \Big\} \tag{6}$$

3. Razliku skupova A i B
$$A \setminus B = \Big\{ x \mid x \in A \text{ i } x \notin B \Big\} \tag{7}$$

4. Kartezijev umnožak skupova
$$A \times B = \Big\{ (x, y) \mid x \in A,\ y \in B \Big\} \tag{8}$$

Prazan skup je skup koji ne sadrži ni jedan element, i označavamo ga sa $\emptyset$.

Na skupovima definiramo sljedeće operacije:

1. Unija skupova A i B

$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ ili } x \in B \right\} \tag{5}$$

2. Presjek skupova A i B

$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ i } x \in B \right\} \tag{6}$$

3. Razliku skupova A i B

$$A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \text{ i } x \notin B \right\} \tag{7}$$

4. Kartezijev umnožak skupova

$$A \times B = \left\{ (x, y) \mid x \in A,\ y \in B \right\} \tag{8}$$

Prazan skup je skup koji ne sadrži ni jedan element, i označavamo ga sa $\emptyset$.

Na skupovima definiramo sljedeće operacije:

1. Unija skupova A i B
$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ ili } x \in B \right\} \tag{5}$$

2. Presjek skupova A i B
$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ i } x \in B \right\} \tag{6}$$

3. Razliku skupova A i B
$$A \setminus B = \left\{ x \mid x \in A \text{ i } x \notin B \right\} \tag{7}$$

4. Kartezijev umnožak skupova
$$A \times B = \left\{ (x, y) \mid x \in A,\ y \in B \right\} \tag{8}$$

Prazan skup je skup koji ne sadrži ni jedan element, i označavamo ga sa $\emptyset$.

Na skupovima definiramo sljedeće operacije:

1. Unija skupova A i B
$$A \cup B = \Big\{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\Big\} \tag{5}$$

2. Presjek skupova A i B
$$A \cap B = \Big\{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\Big\} \tag{6}$$

3. Razliku skupova A i B
$$A \setminus B = \Big\{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\Big\} \tag{7}$$

4. Kartezijev umnožak skupova
$$A \times B = \Big\{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\Big\} \tag{8}$$

Skupovi brojeva

1. Skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \tag{9}$$

2. Skup cijelih brojeva

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \tag{10}$$

3. Skup racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N} \right\} \tag{11}$$

Primijetimo da je

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{12}$$

Neki brojevi se ne mogu zapisati u obliku razlomaka, na primjer $\sqrt{2}$ i π. Takve brojeve nazivamo iracionalni brojevi.

Propozicija*

$\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Skup iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$.

Ako skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ pridružimo skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$, tada dobivamo skup realnih brojeva

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}. \tag{13}$$

Svakoj točki na brojevnom pravcu pridružen je točno jedan realnih broj. Sada imamo inkluziju

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{14}$$

Neki brojevi se ne mogu zapisati u obliku razlomaka, na primjer $\sqrt{2}$ i π. Takve brojeve nazivamo iracionalni brojevi.

Propozicija*

$\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Skup iracionalnih brojeva označavamo s $\mathbb{I}$.

Ako skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ pridružimo skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$, tada dobivamo skup realnih brojeva

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}. \tag{13}$$

Svakoj točki na brojevnom pravcu pridružen je točno jedan realnih broj. Sada imamo inkluziju

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{14}$$

Razlikujemo sljedeće intervale:

1. ograničeni intervali

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\},\qquad (a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}, \tag{15}$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x< b\},\qquad (a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}, \tag{16}$$

2. neogračeni intervali

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\},\qquad (-\infty,b]=x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}, \tag{17}$$

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a< x\},\qquad (-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x< b\}. \tag{18}$$

$$[a,b]\quad \text{zatvoreni interval} \tag{19}$$

$$(a,b)\quad \text{otvoreni interval} \tag{20}$$

Razlikujemo sljedeće intervale:

1. ograničeni intervali

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \tag{15}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \tag{16}$$

2. neogračeni intervali

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \qquad (-\infty, b] = x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \tag{17}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \tag{18}$$

$$[a, b] \quad \text{zatvoreni interval} \tag{19}$$

$$(a, b) \quad \text{otvoreni interval} \tag{20}$$

Razlikujemo sljedeće intervale:

1. ograničeni intervali

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \tag{15}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \tag{16}$$

2. neogračeni intervali

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \qquad (-\infty, b] = x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \tag{17}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \tag{18}$$

$$[a, b] \quad \text{zatvoreni interval} \tag{19}$$

$$(a, b) \quad \text{otvoreni interval} \tag{20}$$

Kompleksni brojevi

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \ i = \sqrt{-1} \tag{21}$$

$$x = Re(z) \quad \text{realni dio} \tag{22}$$

$$y = Im(z) \quad \text{imaginarni dio} \tag{23}$$

Algebarske operacije

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{24}$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \tag{26}$$

Kompleksna konjugacija

$$\bar{z} = x - iy \tag{27}$$

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \; i = \sqrt{-1} \tag{21}$$

$$x = Re(z) \quad \text{realni dio} \tag{22}$$

$$y = Im(z) \quad \text{imaginarni dio} \tag{23}$$

Algebarske operacije

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{24}$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \tag{26}$$

Kompleksna konjugacija

$$\bar{z} = x - iy \tag{27}$$

Kompleksni brojevi u Gaussovoj ravnini

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ možemo pridružiti točku u ravnini (x, y):

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \tag{28}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{udaljenost kompleksnog broja od ishodišta} \tag{29}$$

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \tag{30}$$

gdje se r i φ računaju iz formula

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}(\varphi) = \frac{y}{x} \tag{31}$$

Kompleksni brojevi u Gaussovoj ravnini

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ možemo pridružiti točku u ravnini (x, y):

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \tag{28}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{udaljenost kompleksnog broja od ishodišta} \tag{29}$$

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \tag{30}$$

gdje se r i φ računaju iz formula

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}(\varphi) = \frac{y}{x} \tag{31}$$

Množenje i potenciranje kompleksnih brojeva

$$z_k = r_k(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k)), \quad k = 1, 2 \tag{32}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{33}$$

gdje se koriste trigonometrijske formule

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \tag{34}$$

$$\cos(\varphi_2 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \tag{35}$$

Moivreova formula

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \tag{36}$$

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(\varphi)), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{37}$$

Množenje i potenciranje kompleksnih brojeva

$$z_k = r_k(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k)), \quad k = 1, 2 \tag{32}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{33}$$

gdje se koriste trigonometrijske formule

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \tag{34}$$

$$\cos(\varphi_2 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \tag{35}$$

Moivreova formula

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \tag{36}$$

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(\varphi)), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{37}$$

Korjenovanje kompleksnih brojeva

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \tag{38}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{39}$$

$\sqrt[n]{z}$ ima n različitih vrijednosti koje leže na jediničnoj kružnici radijusa $\sqrt[n]{r}$

Kvantifikatori

Univerzalni kvantifikator $\forall$.

$$\forall \quad \text{"za svaki"} \tag{40}$$

Egzistencijalni kvantifikator $\exists$, $\exists!$

$$\exists \quad \text{"postoji"}, \quad \exists! \quad \text{"postoji jedinstveni"} \tag{41}$$

Primjer

(1) Arhimedov aksiom. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad \frac{1}{n} < \epsilon. \tag{42}$$

(2) Za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $ax = b$.

$$\forall \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ i } b \in \mathbb{R}) \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \text{takav da je} \quad ax = b. \tag{43}$$

Univerzalni kvantifikator $\forall$.

$$\forall \quad \text{"za svaki"} \tag{40}$$

Egzistencijalni kvantifikator $\exists$, $\exists!$

$$\exists \quad \text{"postoji"}, \quad \exists! \quad \text{"postoji jedinstveni"} \tag{41}$$

Primjer

(1) Arhimedov aksiom. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad \frac{1}{n} < \epsilon. \tag{42}$$

(2) Za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $ax = b$.

$$\forall \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ i } b \in \mathbb{R}) \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \text{takav da je} \quad ax = b. \tag{43}$$

Univerzalni kvantifikator $\forall$.

$$\forall \quad \text{"za svaki"} \tag{40}$$

Egzistencijalni kvantifikator $\exists$, $\exists!$

$$\exists \quad \text{"postoji"}, \quad \exists! \quad \text{"postoji jedinstveni"} \tag{41}$$

Primjer

(1) Arhimedov aksiom. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad \frac{1}{n} < \epsilon. \tag{42}$$

(2) Za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $ax = b$.

$$\forall \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ i } b \in \mathbb{R}) \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \text{takav da je} \quad ax = b. \tag{43}$$

Kvantifikatori

Univerzalni kvantifikator $\forall$.

$$\forall \quad \text{"za svaki"} \tag{40}$$

Egzistencijalni kvantifikator $\exists$, $\exists!$

$$\exists \quad \text{"postoji"}, \quad \exists! \quad \text{"postoji jedinstveni"} \tag{41}$$

Primjer

(1) Arhimedov aksiom. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad \frac{1}{n} < \epsilon. \tag{42}$$

(2) Za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $ax = b$.

$$\forall \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ i } b \in \mathbb{R}) \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \text{takav da je} \quad ax = b. \tag{43}$$

Univerzalni kvantifikator $\forall$.

$$\forall \quad \text{"za svaki"} \tag{40}$$

Egzistencijalni kvantifikator $\exists$, $\exists!$

$$\exists \quad \text{"postoji"}, \quad \exists! \quad \text{"postoji jedinstveni"} \tag{41}$$

Primjer

(1) Arhimedov aksiom. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad \frac{1}{n} < \epsilon. \tag{42}$$

(2) Za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $ax = b$.

$$\forall \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ i } b \in \mathbb{R}) \quad \exists! x \in \mathbb{R} \quad \text{takav da je} \quad ax = b. \tag{43}$$

Definicija

Neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozgo ograničen ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x \leq M \quad \text{za svaki} \quad x \in S. \tag{44}$$

M nazivamo majoranta ili gornja međa skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen, kažemo da je S odozgo neograničen.

Definicija

Neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozdo ograničen ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$m \leq x \quad \text{za svaki} \quad x \in S. \tag{45}$$

m nazivamo minoranta ili donja međa skupa S. Ako S nije odozdo ograničen, kažemo da je S odozdo neograničen.

Supremum i infimum skupa

Definicija

Neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozgo ograničen ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x \leq M \quad \text{za svaki} \quad x \in S. \tag{44}$$

M nazivamo majoranta ili gornja međa skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen, kažemo da je S odozgo neograničen.

Definicija

Neprazan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je odozdo ograničen ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$m \leq x \quad \text{za svaki} \quad x \in S. \tag{45}$$

m nazivamo minoranta ili donja međa skupa S. Ako S nije odozdo ograničen, kažemo da je S odozdo neograničen.

Definicija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo ograničen skup. Realan broj L naziva se supremum skupa S ako vrijedi

(i) L je gornja međa:

$$x \leq L \text{ za svaki } x \in S,$$

(ii) L je najmanja gornja međa:

$$\text{za svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } x \in S \text{ takav da je } L - \varepsilon < x.$$

Supremum skupa S označavamo sa

$$L = \sup S \quad \text{ili} \quad L = \sup_{x \in S}\{x\}. \tag{46}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L maksimum ili najveći element skupa S, i pišemo

$$L = \max S \quad \text{ili} \quad L = \max_{x \in S}\{x\}. \tag{47}$$

Ako S nije ograničen odozgo, tada pišemo $\sup S = +\infty$.

Definicija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo ograničen skup. Realan broj L naziva se supremum skupa S ako vrijedi

(i) L je gornja međa:

$$x \leq L \text{ za svaki } x \in S,$$

(ii) L je najmanja gornja međa:

$$\text{za svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } x \in S \text{ takav da je } L - \varepsilon < x.$$

Supremum skupa S označavamo sa

$$L = \sup S \quad \text{ili} \quad L = \sup_{x \in S}\{x\}. \tag{46}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L maksimum ili najveći element skupa S, i pišemo

$$L = \max S \quad \text{ili} \quad L = \max_{x \in S}\{x\}. \tag{47}$$

Ako S nije ograničen odozgo, tada pišemo $\sup S = +\infty$.

Definicija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo ograničen skup. Realan broj L naziva se supremum skupa S ako vrijedi

(i) L je gornja međa:

$$x \leq L \text{ za svaki } x \in S,$$

(ii) L je najmanja gornja međa:

$$\text{za svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } x \in S \text{ takav da je } L - \varepsilon < x.$$

Supremum skupa S označavamo sa

$$L = \sup S \quad \text{ili} \quad L = \sup_{x \in S}\{x\}. \tag{46}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L maksimum ili najveći element skupa S, i pišemo

$$L = \max S \quad \text{ili} \quad L = \max_{x \in S}\{x\}. \tag{47}$$

Ako S nije ograničen odozgo, tada pišemo $\sup S = +\infty$.

Definicija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo ograničen skup. Realan broj L naziva se infimum skupa S ako vrijedi

(i) L je donja međa:

$$L \leq x \text{ za svaki } x \in S,$$

(ii) L je najmanja donja međa:

$$\text{za svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } x \in S \text{ takav da je } x < L + \varepsilon.$$

Infimum skupa S označavamo sa

$$L = \inf S \quad \text{ili} \quad L = \inf_{x \in S}\{x\}. \tag{48}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L minimum ili najmanji element skupa S, i pišemo

$$L = \min S \quad \text{ili} \quad L = \min_{x \in S}\{x\}. \tag{49}$$

Ako S nije ograničen odozdo, tada pišemo $\inf S = -\infty$.

Definicija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo ograničen skup. Realan broj L naziva se infimum skupa S ako vrijedi

(i) L je donja međa:

$$L \leq x \text{ za svaki } x \in S,$$

(ii) L je najmanja donja međa:

$$\text{za svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } x \in S \text{ takav da je } x < L + \varepsilon.$$

Infimum skupa S označavamo sa

$$L = \inf S \quad \text{ili} \quad L = \inf_{x \in S} \{x\}. \tag{48}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L minimum ili najmanji element skupa S, i pišemo

$$L = \min S \quad \text{ili} \quad L = \min_{x \in S} \{x\}. \tag{49}$$

Ako S nije ograničen odozdo, tada pišemo $\inf S = -\infty$.

Definicija

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozdo ograničen skup. Realan broj L naziva se infimum skupa S ako vrijedi

(i) L je donja međa:

$$L \leq x \text{ za svaki } x \in S,$$

(ii) L je najmanja donja međa:

$$\text{za svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } x \in S \text{ takav da je } x < L + \varepsilon.$$

Infimum skupa S označavamo sa

$$L = \inf S \quad \text{ili} \quad L = \inf_{x \in S}\{x\}. \tag{48}$$

Ako je $L \in S$, tada kažemo da je L minimum ili najmanji element skupa S, i pišemo

$$L = \min S \quad \text{ili} \quad L = \min_{x \in S}\{x\}. \tag{49}$$

Ako S nije ograničen odozdo, tada pišemo $\inf S = -\infty$.

Primjer

Odredite infimum, supremum te minumum i maksimum skupova

1. $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$,
2. $B = [1, 5)$,
3. $C = (-\infty, 2]$,
4. $D = \left\{ 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Kako moženo dokazati tvrdnju

$$T(n): \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ? \tag{50}$$

Princip matematičke indukcije

Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

1. Baza indukcije
   Tvrdnja $T(1)$ je istinita.
2. Korak indukcije
   Ako je $T(n)$ istinito, onda je $T(n+1)$ istinito.

Tada je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$.

$$T(1) \Rightarrow T(2) \Rightarrow T(3) \Rightarrow \cdots \tag{51}$$

Kako moženo dokazati tvrdnju

$$T(n): \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ? \tag{50}$$

Princip matematičke indukcije

Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

1. Baza indukcije
   Tvrdnja $T(1)$ je istinita.
2. Korak indukcije
   Ako je $T(n)$ istinito, onda je $T(n+1)$ istinito.

Tada je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$.

$$T(1) \Rightarrow T(2) \Rightarrow T(3) \Rightarrow \cdots \tag{51}$$

Primjer

Matematičkom indukcijom dokažite sjedeće tvrdnje:

1. Bernoullijeva nejednakost

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1, \quad n = 1,2,3,\dots \tag{52}$$

2. $$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{53}$$

3. $$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n = 1,2,3,\dots \tag{54}$$

Definicija

Neka su X i Y neprazni skupovi. Funkcija $f: X \to Y$ je pravilo koje svakom elementu $x \in X$ pridružuje jedinstveni element $y \in Y$.

X	domena funkcije	Y	kodomena funkcije
x	nezavisna varijabla	$y = f(x)$	zavisna varijabla

$$f(X) = \left\{ f(x) \mid x \in X \right\} \quad \text{slika funkcije}$$

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in X \right\} \quad \text{graf funkcije}$$

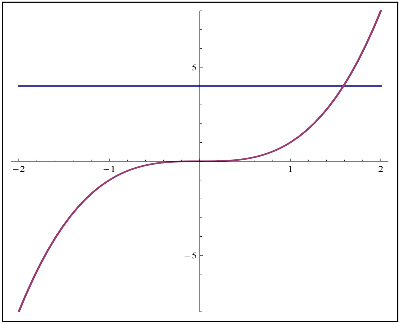
Definicija

Neka je $f : X \to Y$ funkcija.

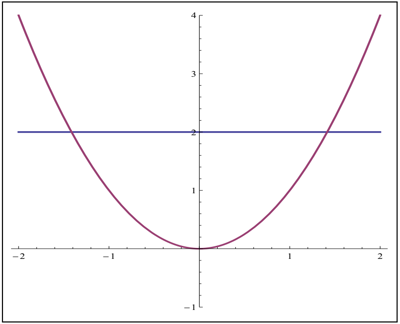
(i) Kažemo da je f injekcija ili 1-1 presikavanje ako za sve $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2. \tag{55}$$

(ii) Kažemo da je f surjekcija ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $y = f(x)$.



$f(x) = x^3$ injekcija



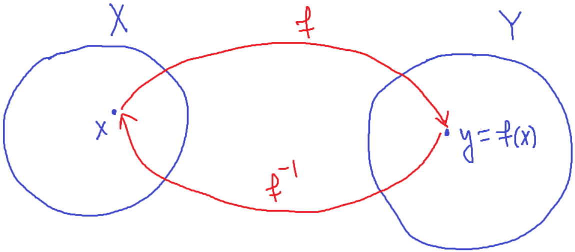
$f(x) = x^2$ nije injekcija

Definicija

Ako je $f\colon X \to Y$ injekcija i surjekcija, tada kažemo da je f bijekcija.

Ako je $f\colon X \to Y$ bijekcija, tada možemo definirati inverznu funkciju $f^{-1}\colon Y \to X$ pravilom

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{za svaki} \quad x \in X. \tag{56}$$



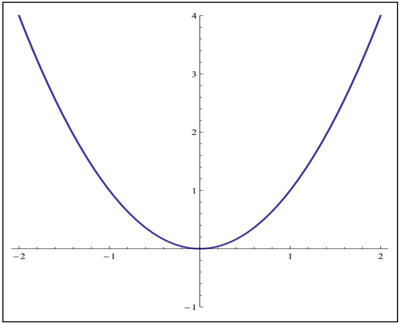
Definicija

Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Kažemo da je

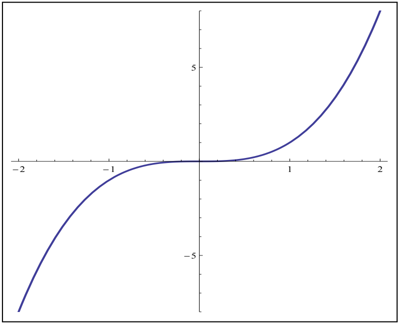
(i) f parna funkcija ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki $x \in X$,

(ii) f neparna funkcija ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in X$.

(iii) f je periodična funkcija ako postoji $T > 0$ takav da je $f(x+T) = f(x)$ za svaki $x \in X$.



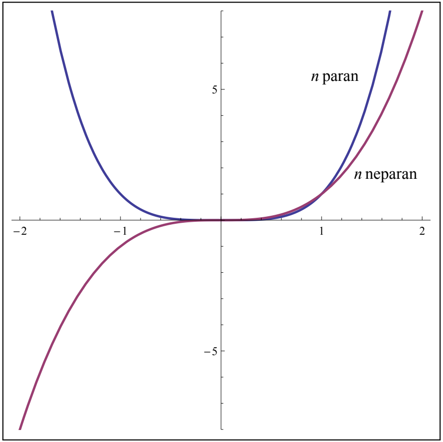
$f(x) = x^2$ parna funkcija



$f(x) = x^3$ neparna funkcija

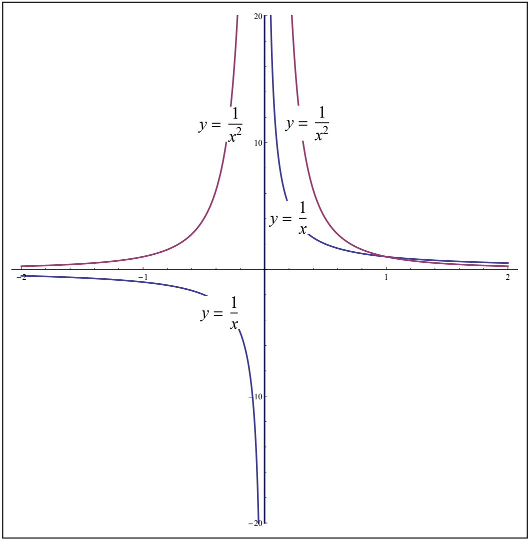
Pozitivna potencija

$y = x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$



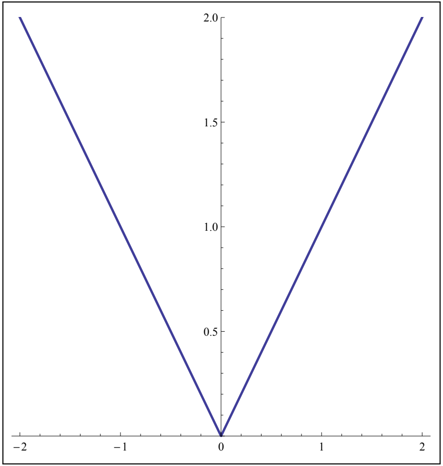
Negativna potencija

$y = x^n, \; n = -1, -2, -3, \ldots$



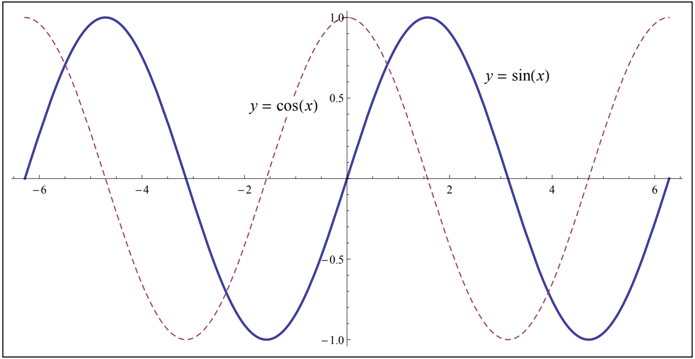
Apsolutna vrijednost

$y = |x|$



Sinus i kosinus

$y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$

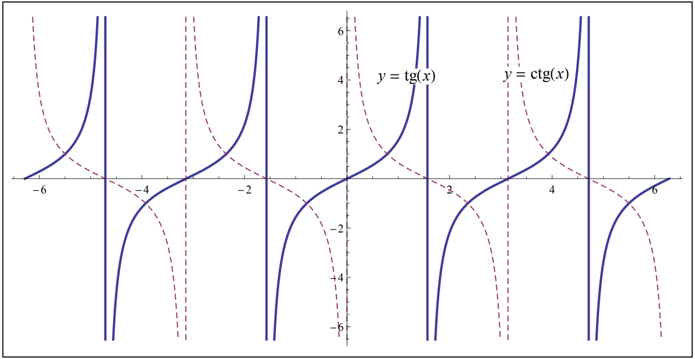


Sinus i kosinus su periodične funkcije perioda 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \tag{57}$$

Tanges i kotanges

$y = \text{tg}(x)$, $y = \text{ctg}(x)$

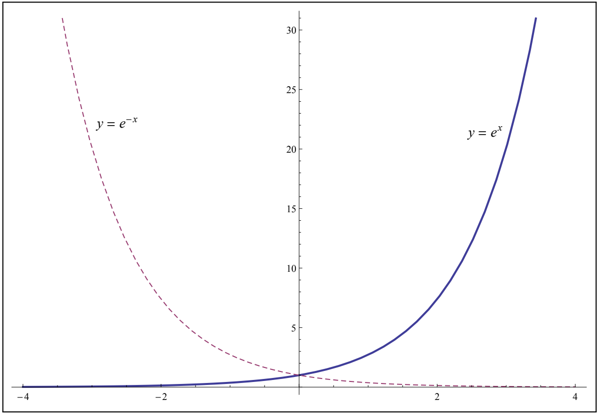


Tanges i kotanges su periodične funkcije perioda π:

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}(x), \quad \text{ctg}(x + \pi) = \text{ctg}(x) \tag{58}$$

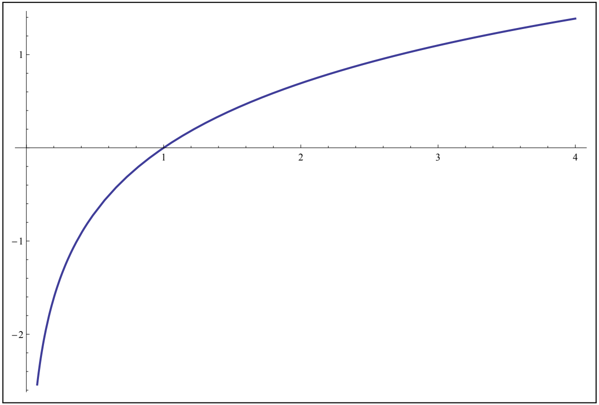
Eksponencijalna funkcija

$y = e^x$, $y = e^{-x}$



Logaritamska funkcija

$y = \ln(x)$



Sinus i kosinus hiperbolni

$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$